

Xavier  
exemplaire  
historique

UNE THEORIE COMBINATOIRE DES  
POLYNOMES ORTHOGONAUX GENERAUX

PAR

Gérard Viennot  
Université de Bordeaux I, France

Notes de conférences données au  
Département de mathématiques et d'informatique  
Université du Québec à Montréal

Septembre - octobre 1983

C.P. 8888, Succursale A  
Montréal, Québec  
Canada, H3C3P8

## Table des matières

### Introduction

i

### Chapitre I      Moments et récurrence linéaire.

§ 1.	Orthogonalité	I-2
§ 2.	Pavages et chemins de Favard	I-6
§ 3.	Chemins de Motzkin	I-11
§ 4.	Preuve bijective de l'orthogonalité	I-15

### Chapitre II      Moments de familles particulières de polynômes orthogonaux

§ 1.	Polynômes de Tchebycheff	II-3
§ 2.	Histoires	II-7
§ 3.	La bijection $\pi \circ \theta$ entre les histoires de Laguerre et les permutations.	II-10
§ 4.	Propriétés de la bijection $\pi \circ \theta$	II-16
§ 5.	Polynômes de Laguerre	II-21
§ 6.	Polynômes d'Hermite	II-27
§ 7.	Polynômes de Charlier	II-30
§ 8.	Polynômes de Meixner de première espèce	II-34
§ 9.	Polynômes de Meixner de seconde espèce	II-39
§ 10.	Polynômes orthogonaux de Scheffer	II-42

### Chapitre III      Polynômes inverses

§ 1.	Polynômes verticaux	III-2
§ 2.	Preuve bijective du théorème 1	III-4
§ 3.	Exemples: les polynômes orthogonaux de Sheffer	III-6
§ 4.	Autres exemples	III-14
§ 5.	Généralisation: chemins de Lukasiewicz	III-16

### Chapitre IV      Déterminants de moments

§ 1.	Calcul des coefficients $b_k$ et $\lambda_k$	IV-2
§ 2.	Déterminants et chemins	IV-8
§ 3.	Déterminants de Hankel de moments	IV-13
§ 4.	La dualité entre chemins de Motzkin et chemin de Favard	IV-21
§ 5.	Séries inverses	IV-28

Chapitre V      Fractions continuées

§ 1.	Développement en J-fraction	V-3
§ 2.	Exemples	V-7
§ 3.	Convergents	V-17
§ 4.	Applications aux identités de Rogers-Ramanujan	V-25
§ 5.	Tassements et moments symétriques	V-29
§ 6.	Fractions multicontinuées	V-38

Chapitre VI      Polynôme de pavage d'un graphe

§ 1.	Polynôme de couplage et polynôme de pavage	VI-3
§ 2.	Fractions continuées arborescentes	VI-11
§ 3.	Chemins arborescents sur un graphe	VI-21
§ 4.	Couplages, dérangements et orthogonalité	VI-32

<u>Bibliographie commentée</u>	B-1
--------------------------------	-----

<u>Références</u>	R-1
-------------------	-----

## Introduction

Depuis quelques années, la théorie classique des polynômes orthogonaux fait l'objet d'un regain d'attention par les combinatoristes.

Des modèles combinatoires sont maintenant connus pour chacune des familles suivantes de polynômes: Hermite, Laguerre, Charlier, Meixner, Jacobi (en particulier Gegenbauer, Legendre, Tchebychef), Krawtchouk, Hahn. Ces modèles proposent des structures finies (permutation, endofonctions, arborescences, couplages,...) interprétant les coefficients de ces polynômes. Si les polynômes dépendent de certains paramètres, les objets combinatoires sont valués par ceux-ci. Dans un premier temps, il s'agit alors de redémontrer combinatoirement les identités classiques satisfaites par ces polynômes, en explicitant des bijections ou des relations entre ces différentes structures finies. Toute une "géométrie" combinatoire de ces polynômes (et aussi des fonctions spéciales) est en cours d'élaboration par différentes écoles, notamment à Cambridge (M.I.T.), en Californie (La Jolla), en Lotharingie (Erlangen, Strasbourg), au Québec (Montréal) et à Vienne. Le lecteur se reportera à l'article de synthèse de Foata [19] présenté au Congrès International des Mathématiciens à Varsovie en 1983 où il trouvera une bibliographie très complète sur tous ces travaux.

La théorie présentée dans ce mémoire est développée dans une autre direction.

D'une part nous traitons les polynômes orthogonaux quelconques. Nous proposons des structures finies (chemins valués) permettant de démontrer combinatoirement des théorèmes classiques valables pour tous les polynômes orthogonaux. Par exemple: l'équivalence entre l'orthogonalité et la classique récurrence à trois termes, ou encore l'équivalence avec les développements en fractions continuées du type Jacobi-Stieltjes.

D'autre part, lorsque nous traitons des familles particulières de polynômes, les objets associés interprètent plutôt la matrice inverse de la matrice formée par les coefficients de ces polynômes. Le point de vue adopté ici est, dans un certain sens, le dual de celui adopté dans les travaux évoqués ci-dessus.

Le point de départ de notre travail est l'interprétation combinatoire de l'orthogonalité des polynômes. Dans les traités classiques, l'orthogonalité est définie par une certaine mesure  $d\psi$  sur un intervalle  $[a,b]$ . Plus précisément, on considère le produit scalaire suivant:

$$(1) \quad \langle P, Q \rangle = \int_a^b P(x)Q(x)d\psi.$$

Ce produit scalaire entre polynômes est entièrement défini par les moments

$$(2) \quad \mu_n = \int_a^b x^n d\psi$$

Il est curieux de constater que les moments de certains polynômes orthogonaux classiques sont des suites de nombres très classiques de la combinatoire. Nous nous sommes donc attachés d'abord à l'interprétation combinatoire des moments. Les polynômes orthogonaux associés sont définis par rapport à la fonctionnelle linéaire  $f$ , déterminée par

$$(3) \quad f(x^n) = \mu_n.$$

Nous ne faisons pas référence à une mesure du type (2) pour réaliser (3). C'est le point de vue adopté par Chihara [7] dès le début de son livre, ou aussi celui adopté par Draux [11] dans son mémoire dans lequel il appelle de tels polynômes des polynômes orthogonaux formels.

Pour traiter les polynômes orthogonaux généraux, nous considérons deux suites  $\{b_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  d'un anneau commutatif  $\mathbb{K}$ . Ces suites permettent de définir les polynômes  $P_n(x)$  par la classique récurrence à trois termes suivantes

$$(4) \quad P_{n+1}(x) = (x-b_n)P_n(x) - \lambda_n P_{n-1}(x).$$

Nous commençons alors par démontrer combinatoirement que ces polynômes sont orthogonaux pour une certaine suite de moments  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ . Ces moments sont interprétés par certains chemins, appelés chemin de Motzkin, valués par les coefficients  $b_n$  et  $\lambda_n$ , considérés dans un premier temps comme variables formelles. Les preuves bijectives relatives aux propriétés classiques des polynômes orthogonaux généraux feront intervenir certaines propriétés, purement combinatoires de ces chemins.

Lorsque les coefficients  $b_n$  et  $\lambda_n$  ont des valeurs particulières, les moments sont alors interprétés comme nombre d'histoires. Cette notion fut introduite par Françon [15] en liaison avec des considérations informatiques de calcul du coût moyen d'une structure de données.

Ces histoires permettent de construire des objets combinatoires interprétant les moments. Intuitivement, le chemin de Motzkin correspond à une séquence d'opérations primitives construisant un objet combinatoire. La valuation correspond au nombre de façons d'effectuer cette opération primitive.

L'interprétation des moments comme chemins valués, ainsi que les constructions combinatoires avec histoires correspondant à des familles particulières de polynômes, ne sont pas nouvelles. Elles sont dues respectivement à Flajolet [14] et Françon, Viennot [20]. Ce mémoire repose sur ces deux articles et en constitue en quelque sorte la suite logique. Nous avons complètement repris ces études antérieures afin de rendre ce travail "self-contained". Beaucoup de nouveautés sont présentées, notamment les preuves bijectives des théorèmes classiques sur les fractions continues et polynômes orthogonaux utilisés par Flajolet dans [14], ainsi qu'une utilisation systématique de la correspondance entre permutations et ce qui est appelé ici "histoires de Laguerre" due à Françon, Viennot [20]. Par exemple les moments de la table II-1 (page II-45) sont obtenus par cette correspondance. Notons que ces moments sont fondamentaux pour notre étude. Il est surprenant qu'ils soient rarement calculés ou écrits de manière explicite dans les traités classiques sur les polynômes orthogonaux.

Comme nous l'avions dit au début, une certaine dualité apparaît tout au long de ce travail. C'est par exemple la "dualité" entre chemins de Motzkin interprétant les moments et chemins de Favard interprétant la récurrence linéaire (4), (voir figure 12, page IV-26). Cette dualité entre chemins est liée au théorème de Jacobi sur les déterminants. Pour des valeurs particulières des coefficients  $b_n$  et  $\lambda_n$ , cette dualité devient celle existant entre nombres de Stirling de première et seconde espèce, ou encore celle entre fonctions symétriques élémentaires et homogènes. La dualité est aussi celle entre les polynômes orthogonaux et les polynômes verticaux du chapitre III relatifs à la matrice inverse des coefficients. Dans ce même chapitre, nous donnons les séries génératrices exponentielles des polynômes orthogonaux de Sheffer, à savoir les polynômes d'Hermite, Laguerre, Charlier, Meixner 1ère et 2ème

classe. Ces séries sont définies par deux fonctions  $s(t)$  et  $q(t)$  interprétées en termes d'histoires. En se reportant à la relation III-12, la dualité prend maintenant la forme de l'inversion de Lagrange, associant à la série  $(q(t))$  la série réciproque  $q^{<-1>}(t)$ .

Un des intérêts des preuves bijectives des propriétés bien connues sur les polynômes orthogonaux généraux est que certaines de ces bijections s'étendent sans effort à d'autres structures combinatoires plus compliquées. Des résultats nouveaux apparaissent, en liaison avec certains travaux récents en combinatoire comme par exemple les polynômes de couplages des graphes qui font l'objet du chapitre VI. Des fractions continuées dites arborescentes y apparaissent. Nous avons pu ainsi résoudre des problèmes posés très récemment par les physiciens (voir Viennot [41]).

Il s'avère que plusieurs bijections de ce travail, démontrant des théorèmes fort différents sont en fait très voisines les unes des autres. Nous aurions pu unifier toutes ces preuves, au prix d'un certain formalisme, en introduisant la notion d'empilement de pièces sur un ensemble donné. Cette notion fut introduite par Dulucq, Viennot [12] afin de simplifier les preuves bijectives de Foata [17], [18] sur certains théorèmes classiques d'algèbre matricielle, en liaison avec le monoïde de commutation de Cartier, Foata [6]. La dernière conférence à Montréal, qui n'est pas reproduite ici, avait pour objet de présenter un théorème sur les empilements, avec preuve bijective, donnant à la fois comme cas particulier une bonne dizaine de propositions: preuve bijective de l'orthogonalité (proposition I-17 et corollaire I-19), inversion de la matrice des coefficients (théorème III-1), équivalence avec les fractions continuées (proposition V-2, relation V-(27), relation V-(40), certaines propositions de Godsil sur les polynômes de couplages des graphes (proposition VI-13), un théorème sur les convergents des fractions continuées arborescentes (proposition VI-7), le théorème classique donnant l'inverse d'une matrice (voir Foata [17], le "théorème maître" de MacMahon [6] (avec une bijection supplémentaire donnant le théorème de Jacobi [18]), le théorème de Cayley-Hamilton [35], enfin le théorème d'Andrews [1] interprétant les inverses des identités de Rogers-Ramanujan (relations V-(47), V-(48)). Tout ce travail sera rédigé ultérieurement.

Nous n'avons pas inclus dans ce mémoire les applications possibles de la théorie bijective présentée ici.

Une application possible de certains aspects du chapitre VI et du modèle des empilements de pièces, est en physique statistique, avec la résolution combinatoire du modèle des animaux dirigés introduit par les physiciens en 1982. Plusieurs conjectures avaient été formulées. Elles sont résolues, pratiquement sans calculs, grâce aux bijections présentées ici, et à des extensions de celles-ci aux empilements. Une synthèse est présentée par l'auteur dans l'exposé [41] au séminaire N. Bourbaki.

Une autre application possible est en liaison avec la biologie moléculaire, pour des problèmes de dénombrement de structures secondaires d'acides nucléiques monobrinés (ARN, ARNT, ARNM, ...) selon un paramètre appelé complexité. Des polynômes de Tchebycheff généralisés y apparaissent. On se reportera au résumé [38] d'un article à venir.

Remarquons que ces deux applications à la physique statistique et la biologie moléculaire ont fait l'objet de deux exposés au séminaire de combinatoire de l'UQAM, enregistrés sur bande magnétoscopique.

Une autre application possible est en Informatique, avec le calcul du coût moyen d'une structure de données intégrée sur une séquence aléatoire d'opérations primitives. C'est la théorie mise en place par Flajolet, Françon, Vuillemin (voir par exemple [15]). A chaque structure de donnée est associée une famille de polynômes orthogonaux: Tchebycheff pour les piles, Hermite pour les files de priorités, Laguerre pour les dictionnaires, certains polynômes de Meixner pour les listes triées, etc...

Cette théorie présente certaines analogies avec celle des processus de vie et de mort de Karlin, McGregor. Les probabilités jouent le rôle de nombre de possibilités d'effectuer une opération primitive. Dans les deux cas, ce sont des spécifications particulières des valuations formelles  $b_n$  et  $\lambda_n$  des chemins de Motzkin présentés dans ce travail.



La théorie des histoires présentées au chapitre II peut être généralisée, en vue de la résolution combinatoire (c'est-à-dire le calcul des coefficients des noyaux de Volterra) des équations différentielles non linéaires en régime forcé. Ce travail est lié à celui de Fliess et ses élèves (voir par exemple [16]) et fera l'objet d'un autre mémoire par l'auteur. Là encore, la théorie combinatoire des polynômes orthogonaux de Sheffer présentée dans les chapitres II et III constitue un bon point de départ.

Nous aurions aussi aimé dans ce travail développer plus longuement une théorie combinatoire des approximants de Padé. Nous y faisons allusion dans les chapitre IV et V.

Certains aspects de ce travail ont été présentés dans différents exposés oraux: au séminaire lotharingien, à Oberwolfach, à l'Université de Californie à San Diego.

Je remercie vivement Pierre Leroux d'avoir rendu possible la rédaction de ce travail en m'invitant à l'exposer à Montréal. Ces notes ont été écrites pendant l'automne québécois, au sein de l'ambiance chaleureuse de l'équipe combinatoire de l'Université du Québec à Montréal. Je remercie aussi tous les participants (notamment F. Bergeron, C. Blais, P. Bouchard, J. Bourret, Y. Constantineau, H. Décoste G. et J. Labelle, P. Leroux, V. Strehl) pour de nombreuses discussions, leur intérêt passionné, et aussi leur belle endurance pour les six exposés qui sont devenus en fait six après-midi bien remplies.

Enfin, je remercie les organismes suivants qui ont contribué financièrement à ma visite à Montréal et à la publication de ces notes: la Fondation de l'Université du Québec à Montréal, le F.C.A.C. (EQ1608) du Gouvernement du Québec et le C.R.S.N.G. (A5660) du Canada.

## Chapitre I - Moments et récurrence linéaire

Nous rappelons la définition de polynômes orthogonaux  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  relativement à une forme linéaire  $f$  (ou d'une manière équivalente à une suite de moments  $\mu_n = f(x^n)$ ). Une propriété fondamentale est l'équivalence entre l'orthogonalité des  $P_n$  et le fait que ces polynômes satisfont une récurrence linéaire à trois termes.

En partant de cette récurrence, nous prouvons l'orthogonalité "bijectivement" en donnant une interprétation combinatoire des moments avec certains chemins valués appelés chemins de Motzkin. La récurrence linéaire est interprétée en chemins valués, dits chemins de Favard. Ces deux familles de chemins jouent un rôle fondamental dans toute cette étude. Dans un sens précisé plus tard, une dualité existe entre ces deux familles. Par commodité pour les bijections, les chemins de Favard seront aussi interprétés comme des pavages d'un segment par des monominos et dominos.

Dans toute cette théorie, les polynômes considérés sont des polynômes à une variable  $x$  avec coefficients dans un anneau commutatif unitaire  $K$ . En général  $K$  est le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes ou  $\mathbb{R}$  des nombres réels. Lorsque les polynômes  $P_n$  dépendent de certains paramètres complexes  $\alpha, \beta, \gamma$ , on pourra aussi considérer que  $P_n$  est un polynôme à coefficients dans le corps des fractions  $K = \mathbb{C}(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ . Egalement pour les "q-analogues" de ces polynômes, la variable  $q$  sera considérée comme une variable formelle.

### §1. Orthogonalité

Soit  $K$  un anneau commutatif unitaire intègre et  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $K$ . Il existe une unique forme linéaire  $f: K[x] \rightarrow K$  telle que  $f(x^n) = \mu_n$ .

Dans la théorie des polynômes orthogonaux,  $f$  est appelée fonctionnelle des moments et  $\mu_n$  le moment d'ordre  $n$ .

Définition 1. Une suite  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  de polynômes est dite suite de polynômes orthogonaux pour la fonctionnelle de moments  $f$  ssi pour tout entiers  $m$  et  $n \geq 0$ , on a les 3 conditions

- (1)  $P_n(x)$  est un polynôme de degré  $n$ ,
- (2)  $f(P_n(x)P_m(x)) = 0$  pour  $m \neq n$ ,
- (3)  $f(P_n^2(x)) \neq 0$ .

Nous dirons aussi que les  $P_n$  sont orthogonaux pour la suite de moments  $\{\mu_n\}$ . Dorénavant le terme suite de polynômes  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  supposera toujours la condition (1).

Remarque 2. Si  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  est une suite de polynômes orthogonaux pour  $f$ , ils sont également orthogonaux pour la forme  $g = af$ , avec  $a$  élément non nul de  $K$ .

Réciproquement, toute forme  $g$  pour laquelle les polynômes  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  sont orthogonaux est telle que  $g = af$  avec  $a \neq 0$ . En effet,  $g$  est définie à un facteur multiplicatif près par la condition (2) avec  $m = 0$ , c'est-à-dire:

$$(4) \quad g(P_n) = 0 \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Si l'on impose  $\mu_0 = 1$ , les moments  $\mu_n$  sont alors uniquement déterminés.

Remarque 3. Si  $\{P_n\}_{n \geq 0}$  est une suite de polynômes orthogonaux pour  $f$ , il en est de même pour la suite  $\{a_n P_n\}_{n \geq 0}$  lorsque  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  est une suite arbitraire d'éléments non nuls de  $K$ . Nous pourrions donc toujours supposer que  $P_n(x)$  est unitaire, c'est-à-dire que le coefficient de  $x^n$  (terme de plus haut degré) est 1.

La réciproque sera énoncée au corollaire 7.

Remarque 4. Si  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$  est une suite de moments avec  $\mu_0 \neq 0$ , il n'existe pas nécessairement des polynômes orthogonaux pour cette suite. Le lecteur vérifiera qu'il en est ainsi pour une suite telle que  $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ .

Les propositions suivantes sont élémentaires et ne nécessitent pas d'interprétation combinatoires.

Lemme 5 - Soit  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  une suite de polynômes et  $f: K[x] \rightarrow K$  une forme linéaire.

Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) La suite  $\{P_n\}$  est orthogonale pour  $f$ ,
- (ii) Pour tout polynôme  $Q$  de degré  $m < n$ ,  $f(QP_n) \neq 0$  et si  $m = n$  alors  $f(QP_n) \neq 0$ .
- (iii) Pour tout  $m$ ,  $0 \leq m \leq n$ ,  $f(x^m P_n(x)) = c_n \delta_{mn}$  avec  $c_n \neq 0$  et  $\delta_{mn}$  le symbole de Kronecker.

Pour le lemme suivant et son corollaire 7, nous supposons que  $K$  est un corps.

Lemme 6 - Soit  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  une suite de polynômes orthogonaux pour  $f$  et

$$Q(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x). \quad \text{Alors } a_k = \frac{f(QP_k)}{f(P_k^2)}.$$

Corollaire 7 - Soit  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  une suite de polynômes orthogonaux pour  $f$ . Toute suite  $\{Q_n(x)\}_{n \geq 0}$  orthogonale pour  $f$  se déduit de  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  par multiplication par une constante, c'est-à-dire

$$(5) \quad Q_n(x) = a_n P_n(x) \text{ avec } a_n \neq 0 \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Remarque 8. Habituellement, l'orthogonalité de polynômes à coefficients réels est définie par une mesure, c'est-à-dire que la fonctionnelle  $f: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$  est défini par l'intégrale de Stieljes.

$$(6) \quad F(P(x)) = \int_a^b P(x) d\psi(x).$$

La recherche de la mesure  $d\psi$  s'appelle le problème des moments. Usuellement on cherche  $\psi$  comme fonction bornée non-décroissante, et telle que l'intégrale (6) soit définie lorsque les bornes  $a$  ou  $b$  sont infinies. Dans tout ce travail nous garderons  $f$  définie par les moments  $\mu_n$  et laisserons de côté la question (ouverte) d'interpréter combinatoirement la mesure  $d\psi$ .

L'un des théorèmes les plus importants de la théorie classique des polynômes orthogonaux est

Théorème 9. Soient  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  une suite de polynômes unitaires de  $\mathbb{K}[x]$ . Nous supposons ici que  $\mathbb{K}$  est un corps. Cette suite est orthogonale pour une fonctionnelle linéaire  $f$  ssi il existe deux suites  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  et  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  d'éléments de  $\mathbb{K}$  avec  $\lambda_n \neq 0$

pour tout  $n \geq 1$  et vérifiant la condition

$$(7) \quad P_{n+1}(x) = (x - b_n)P_n(x) - \lambda_n P_{n-1}(x) \text{ pour } n \geq 1.$$

Le principal but de ce chapitre est de montrer bijectivement l'orthogonalité des polynômes  $P_n(x)$  définis par la récurrence linéaire - trois termes

(7) avec les conditions initiales

$$(8) \quad P_0(x) = 1, P_1(x) = x - b_0.$$

Cette implication, constituant la condition nécessaire du théorème 9, est appelée aussi "théorème de Favard". Il n'est pas nécessaire ici de supposer que  $\mathbb{K}$  est un corps.

§2. Pavages et chemins de Favard

Dans tout ce travail,  $\mathbb{H}$  désigne le "plan"  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  des combinatoristes. Un chemin  $\omega$  de  $\mathbb{H}$  est une suite  $\omega = (s_0, s_1, \dots, s_n)$  d'éléments  $s_i = (x_i, y_i)$  de  $\pi$ . Les éléments  $s_i$  sont appelés sommets de  $\omega$ . Nous dirons que  $\omega$  va de  $s_0$  (sommet initial ou point de départ de  $\omega$ ) à  $s_n$  (sommet final ou point d'arrivée de  $\omega$ ). Les couples  $(s_i, s_{i+1})$  sont les pas élémentaires du chemin. L'entier  $n$  est la longueur du chemin, que nous noterons  $|\omega|$ .

Le produit (ou concaténation) des deux chemins  $\omega = (s_0, \dots, s_n)$  et  $\eta = (t_0, \dots, t_m)$  est défini seulement si  $s_n = t_0$  et est le chemin  $\xi = (s_0, \dots, s_n = t_0, t_1, \dots, t_m)$  de longueur  $n+m$  et que nous noterons  $\xi = \omega\eta$ .

Ainsi on peut considérer un chemin  $\omega$  comme le produit de ses pas élémentaires:  $\omega = (s_0, s_1)(s_1, s_2) \dots (s_{n-1}, s_n)$ . Nous parlerons aussi de factorisation d'un chemin  $\omega = \omega_1 \dots \omega_k$  en chemins  $\omega_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Les  $\omega_i$  sont appelés facteurs. Le chemin  $\omega_1$  (resp.  $\omega_k$ ) est appelé facteur gauche ou début (resp. facteur droit ou fin) du chemin  $\omega$ .

Remarquons qu'il y a plusieurs "chemins vides" possibles  $\omega = (s, s)$ .

Le pas  $(s_i, s_{i+1})$  est dit Nord (resp. Sud) ssi  $s_i = (x, y)$ ,  $s_{i+1} = (x', y')$  avec  $x = x'$  et  $y' = y+1$  (resp.  $y' = y-1$ ). De même on définirait les pas Est et Ouest.

Le pas  $(s_i, s_{i+1})$  est dit Nord-Est (resp. Sud-Est) ssi  $s_i = (x, y)$ ,  $s_{i+1} = (x', y')$  avec  $x = x'+1$  et  $y' = y+1$  (resp.  $y' = y-1$ ). De même on définirait les pas Nord-Ouest et Sud-Ouest.

Nous aurons également besoin du pas Nord-Nord, c'est-à-dire  $x=x'$  et  $y'=y+2$ .

Pour tout sommet  $s=(x,y)$  la coordonnée  $y$  est appelé le niveau de  $s$ . La coordonnée  $x$  est, comme usuellement, l'abscisse de  $s$ .

Les chemins que nous considérerons seront valués, c'est-à-dire que nous aurons une application partielle  $v: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow K$  associant à chaque pas élémentaire  $(s_i, s_{i+1})$  un élément  $v(s_i, s_{i+1})$  de l'anneau  $K$ . La valuation  $v(\omega)$  d'un chemin  $\omega = (s_0, \dots, s_n)$  est définie comme étant le produit des valuations des pas élémentaires:

$$(9) \quad v(\omega) = \prod_{i=1}^h v(s_{i-1}, s_i).$$

Dans tout ce paragraphe, nous supposerons donnée deux suites  $\{b_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  d'éléments de l'anneau  $K$ .

Définition 10. Un chemin de Favard est un chemin  $\eta=(s_0, \dots, s_n)$  partant de  $s_0=(0,0)$  et ayant des pas élémentaires de l'un des trois types suivants: Nord, Nord-Nord, Nord-Est.

La valuation d'un tel chemin est défini par les règles suivantes.

La valuation d'un pas Nord (resp. Nord-Nord)  $(s_i, s_{i+1})$  est égale à  $-b_k$  (resp.  $-\lambda_k$ ) si  $k$  (resp.  $k-1$ ) est le niveau du point de départ  $s_i$ . La valuation d'un pas Nord-Est est toujours  $x$  (voir l'exemple de la figure 1).



Nous noterons  $v_0(\eta)$  cette valuation. Il sera commode d'introduire aussi la valuation  $v(\eta)$ , obtenue en faisant  $x = 1$  dans  $v_0(\eta)$ . Ainsi  $v_0(\eta) = v(\eta)x^{NE(\eta)}$ , dans lequel  $NE(\eta)$  désigne le nombre de pas Nord-Est du chemin  $\eta$ .

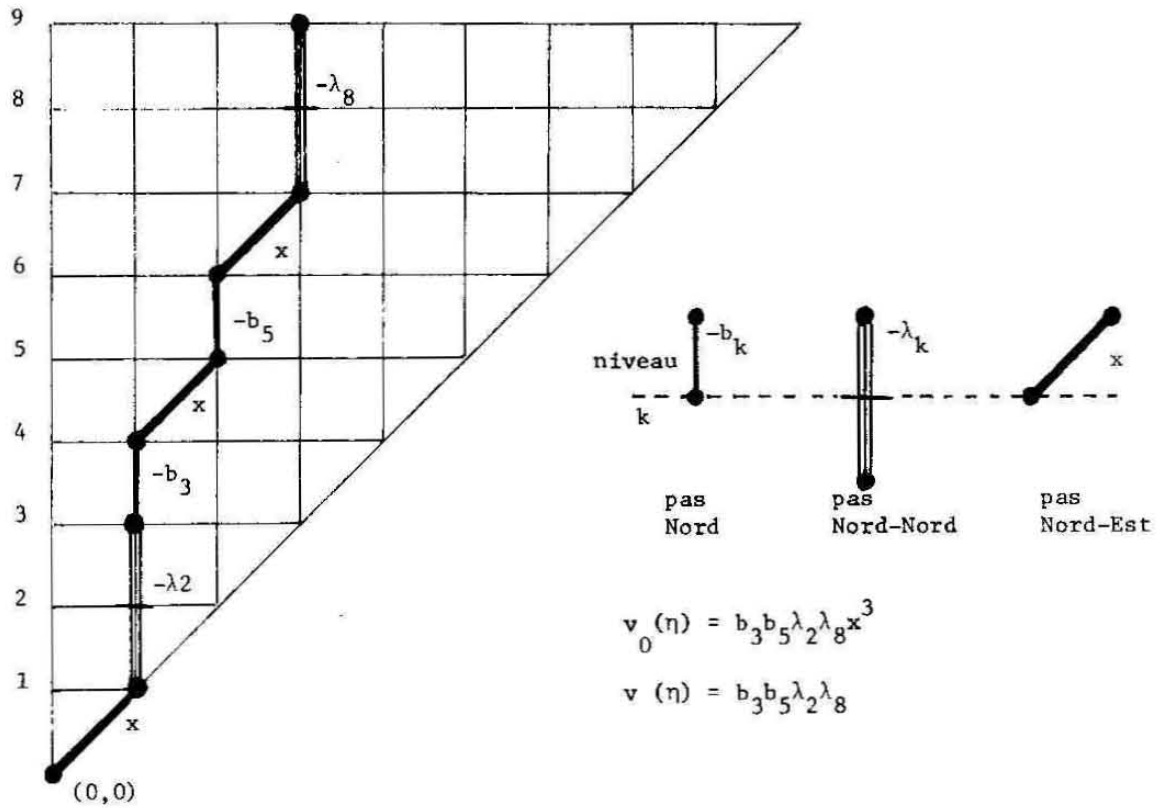


Figure 1. Un chemin de Favard valué.

Il est évident que nous venons simplement de traduire en termes de chemins valués la récurrence linéaire (7). Plus précisément:

Lemme 11 - Soit  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  une suite de polynômes. Cette suite satisfait les conditions (7) et (8) ssi elle satisfait la condition

$$(10) \quad P_n(x) = \sum_{\alpha \in F_n} v_0(\alpha),$$

dans laquelle  $F_n$  désigne l'ensemble des chemins de Favard arrivant au niveau  $n$ .

Une autre reformulation combinatoire possible de la récurrence linéaire (7) est avec la notion de pavages valués d'un segment.

Notons  $[n]$  l'ensemble des entiers  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Définition 12. Un pavage du segment  $[n]$  est la donnée d'un ensemble de parties de  $[n]$  deux à deux disjointes et ayant l'un des deux types suivants: monomino, c'est-à-dire partie réduite à un élément, soit domino, c'est-à-dire partie formée de deux éléments consécutifs  $\{i, i+1\}$  de  $[n]$ .

La valuation d'un pavage  $\alpha$  est définie de la façon suivante. Chaque monomino  $\{k\}$  (resp. domino  $\{k, k+1\}$ ) est valué  $-b_{k-1}$  (resp.  $-\lambda_k$ ). La valuation  $v(\alpha)$  de  $\alpha$  est le produit des valuations des monomins et dominos. Notons  $p(\alpha)$  le nombre de points isolés de  $\alpha$  (points n'appartenant à aucun monomino ou domino).

Comme pour les chemins de Favard, notons  $v_0(\alpha) = v(\alpha)x^{p(\alpha)}$ .

Il est alors évident que

Lemme 13 - Soit  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  une suite de polynômes. Cette suite satisfait les

conditions (7) et (8) ssi elle satisfait la condition

$$(11) \quad P_n(x) = \sum_{\alpha \in Q_n} v_0(\alpha)$$

dans laquelle  $Q_n$  désigne l'ensemble des pavages du segment  $[n] = \{1, \dots, n\}$ .

Une bijection évidente conservant la valuation relie les chemins de Favard  $\eta$  arrivant au niveau  $n$  et les pavages  $\alpha$  de  $[n]$ . Chaque pas Nord-Est (resp. Nord, resp. Nord-Nord) correspond à un point isolé (resp. monomino, resp. domino). Par exemple le chemin  $\eta$  de la figure 1 correspond au pavage  $\alpha$  de la figure 2.

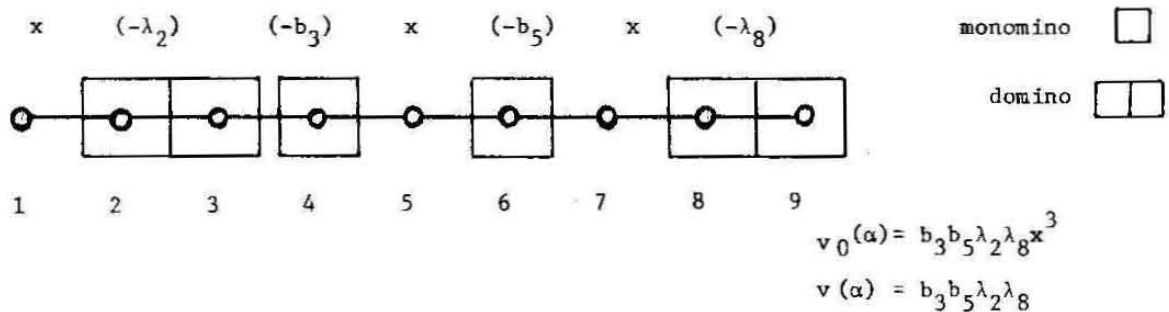


Figure 2. Un pavage valué

Enfin un troisième codage possible de la récurrence linéaire (7) est par un mot à trois lettres  $\{X, B, R\}$ , formé de la concaténation de lettres  $X$ ,  $B$  et de facteurs  $RR$ . La lettre  $X$  (resp.  $B$ , resp. facteur  $RR$ ) correspond au pas

Nord-Est (resp. Nord, resp. Nord-Nord) des chemins de Favard. Par exemple le chemin  $\eta$  de la figure 1, ou le pavage  $\beta$  de la figure 2 sont codés par le mot  $w = XRRBXRR$  de longueur  $n$ .

Pour chaque preuve bijective nous utiliserons l'interprétation la plus commode.

Remarque 14 . Le nombre  $u_n$  de chemins de Favard arrivant au niveau  $n$  (resp. de pavages de  $[n]$ ) satisfait la récurrence

$$(12) \quad u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}, \quad u_0 = 1, \quad u_2 = 2.$$

Ces nombres sont connus sous le nom de nombres de Pell.

### §3. Chemins de Motzkin

Définition 15. Un chemin  $\omega = (s_0, \dots, s_n)$  est dit chemin de Motzkin ssi il satisfait les trois conditions suivantes

- (i) les pas élémentaires de  $\omega$  ont l'un des trois types suivant: Nord-Est, Est, Sud-Est,
- (ii) le niveau des sommets de  $\omega$  est  $\geq 0$ ,
- (iii)  $s_0 = (0,0)$  et  $s_n = (n,0)$ .

Définition 16. Un chemin de Dyck est un chemin de Motzkin n'ayant pas de pas élémentaires Est.

Le nombre de chemin de Dyck de longueur  $2n$  est le classique nombre de Catalan  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ , dont la série génératrice est

$$(13) \quad \sum_{n \geq 0} C_n t^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t}.$$

La dénomination "chemin de Dyck" provient du fait que ces chemins sont codés par des mots à deux lettres ( $x$  pour un pas Nord-Est et  $\bar{x}$  pour un pas Sud-Est), bien connus en Informatique théorique sous le nom de mot de Dyck.

Le nombre de chemins de Motzkin de longueur  $n$  est connu comme le nombre de Motzkin  $M_n$ , dont la série génératrice est

$$(14) \quad \sum_{t \geq 0} M_n t^n = \frac{1+t - \sqrt{1-2t+3t^2}}{2t}.$$

Comme au §2, nous supposons données deux suite  $\{b_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  d'éléments de l'anneau  $\mathbb{K}$ .

Nous définissons une valuation pour les chemins de Motzkin: la valuation d'un pas élémentaire Nord-Est (resp. Est, resp. Sud-Est) dont le niveau du point de départ est  $k$ , est égale à 1 (resp.  $b_k$ , resp.  $\lambda_k$ ).

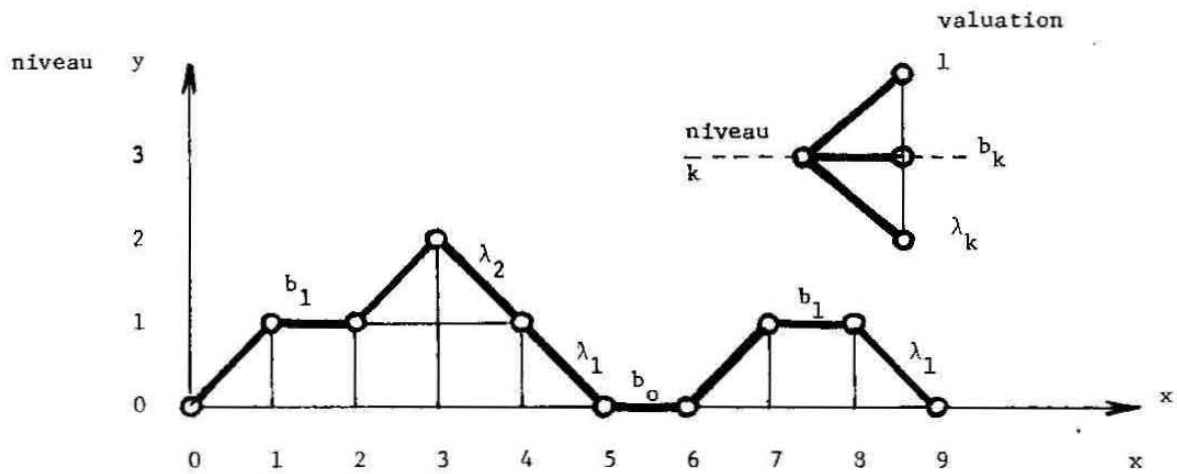


Figure 3. Un chemin de Motzkin valué.

On peut considérer les valuations  $b_k$  et  $\lambda_k$  comme des variables formelles. Dans ce cas  $K = \mathbb{Z}[b_0, b_1, \dots, b_k, \dots; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots]$ . Nous nous intéressons plus spécialement à la suite  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  d'éléments de  $K$  définis par

$$(15) \quad u_n = \sum_{|\omega|=n} v(\omega),$$

où la sommation est étendue à tous les chemins de Motzkin de longueur  $n$ .

Les premières valeurs de ces polynômes sont les suivantes

$$\mu_0 = 1,$$

$$\mu_1 = b_0,$$

$$\mu_2 = b_0^2 + \lambda_1,$$

$$\mu_3 = b_0^3 + 3b_0\lambda_1,$$

$$\mu_4 = b_0^4 + 3b_0^2\lambda_1 + 2b_0b_1\lambda_1 + b_1^2\lambda_1 + \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2.$$

Plus généralement, nous aurons à considérer des chemins satisfaisant les deux premières conditions de la définition 15, mais pas forcément la troisième. Nous dirons également que ces chemins sont de Motzkin, mais en précisant qu'ils vont du niveau  $k \geq 0$  au niveau  $\lambda \geq 0$ . Le terme "chemin de Motzkin" signifiera implicitement  $k = \lambda = 0$ . Ces chemins de Motzkin seront également valués par les  $b_k$  et  $\lambda_k$ .

§4- Preuve bijective de l'orthogonalité-

Soient  $\{b_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  deux suites d'éléments de l'anneau  $\mathbb{K}$  (on peut toujours supposer  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[b_0, b_1, \dots; \lambda_1, \lambda_2, \dots]$ ). Soient  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  la suite de polynômes de l'anneau  $\mathbb{K}[x]$  définie par la récurrence linéaire (7) avec condition initiale (8). Soit  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$  la suite d'éléments de  $\mathbb{K}$  définie par (15) et  $f: \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}$  l'unique fonctionnelle linéaire telle que  $f(x^n) = \mu_n$ .

On peut alors énoncer:

Proposition 17- Pour tous entiers  $n, k, \ell \geq 0$ , on a la relation

$$(16) \quad f(x^n P_k(x) P_\ell(x)) = (\lambda_1 \dots \lambda_\ell) \sum_{\omega} v(\omega),$$

où la sommation est étendue à tous les chemins de Motzkin  $\omega$  de longueur  $n$  allant du niveau  $k$  au niveau  $\ell$

Remarque 18. Le lecteur vérifiera que le second membre de (16) est bien une expression symétrique en  $k$  et  $\ell$ . Celui-ci est aussi la somme des valuations des chemins de Motzkin (allant du niveau 0 au niveau 0), de longueur  $n+k+\ell$  et tels que les  $k$  premiers (resp.  $\ell$  derniers) pas élémentaires sont des pas Nord-Est (resp. Sud-Est).

La proposition 17 implique immédiatement la partie "condition nécessaire" du théorème 9, plus précisément,

Corollaire 19- (Théorème de Favard) Soient  $\{b_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  deux suites de l'anneau  $\mathbb{K}$ , et  $\{P_n(x)\}_{n \geq 1}$  et  $f$  définis comme ci-dessus. On a la condition suivante, pour tous entiers  $k, \ell \geq 0$

$$(17) \quad f(P_k P_\ell) = \lambda_1 \dots \lambda_\ell \delta_{k\ell}.$$



En particulier, la suite  $\{P_n(x)\}_{n \geq 1}$  est orthogonale pour la forme  $f$  dès que  $\lambda_k \neq 0$  pour tout  $k \geq 1$ .

Preuve bijective de la proposition 17.

Nous interprétons d'abord combinatoirement le membre gauche de (16), en utilisant les relations (11) et (15) interprétant  $P_k$ ,  $P_\ell$  et  $f$ . Il vient

$$(18) \quad f(x^n P_k(x) P_\ell(x)) = \sum_{(\omega, \alpha, \beta) \in E_{n,k,\ell}} v(\omega) v(\alpha) v(\beta),$$

dans lequel  $E_{n,k,\ell}$  désigne l'ensemble des triplets  $(\omega, \alpha, \beta)$  dans lequel  $\alpha$  (resp  $\beta$ ) est un pavage du segment  $[k]$  (resp.  $[\ell]$ ) et  $\omega$  un chemin de Motzkin de longueur  $n + p(\alpha) + p(\beta)$ , en désignant par  $p(\alpha)$  (resp.  $p(\beta)$ ) le nombre de points isolés de  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ).

Soit  $F_{n,k,\ell} \subseteq E_{n,k,\ell}$  l'ensemble des triplets  $(\omega, \alpha, \beta)$  de  $E_{n,k,\ell}$ , dans lequel  $\alpha$  et  $\beta$  sont des pavages vides (pas de monominos ou dominos), et tels que les  $k$  premiers (resp.  $\ell$  derniers) pas de  $\omega$  sont des pas Nord-Est (resp. Sud-Est).

$$(19) \quad \sum_{(\omega, \alpha, \beta) \in E_{n,k,\ell}} v(\omega) v(\alpha) v(\beta) = \sum_{(\omega, \alpha, \beta) \in F_{n,k,\ell}} v(\omega) v(\alpha) v(\beta).$$

Supposons que l'on ait construit une involution  $\theta : E_{n,k,\ell} \setminus F_{n,k,\ell} \rightarrow E_{n,k,\ell} \setminus F_{n,k,\ell}$ , vérifiant la condition

$$(20) \quad \text{Si } (\omega', \alpha', \beta') = \theta(\omega, \alpha, \beta) \text{ alors } v(\omega') v(\alpha') v(\beta') = -v(\omega) v(\alpha) v(\beta).$$

Alors il est clair que (19) est démontré.

Nous construisons cette involution  $\Theta$  de la façon suivante.

Notons  $G_{n,k,\ell}$  (resp.  $D_{n,k,\ell}$ ) l'ensemble des éléments  $(\omega, \alpha, \beta)$  de  $E_{n,k,\ell}$  tels que  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) soit vide et tels que les  $k = p(\alpha)$  premiers (resp.  $\ell = p(\beta)$  derniers) pas de  $\omega$  soient des pas Nord-Est (resp. Sud-Est).

Il est clair que  $F_{n,k,\ell} = G_{n,k,\ell} \cap D_{n,k,\ell}$ .

Soit  $(\omega, \alpha, \beta) \in E_{n,k,\ell} \setminus G_{n,k,\ell}$ .

Notons  $h(\omega)$  le niveau (c'est-à-dire le niveau de son point de départ) du premier pas de  $\omega$ , parmi les  $p(\alpha)$  premiers pas, qui est un pas Est ou Sud-Est. Si celui-ci n'existe pas on pose alors  $h(\omega) = \infty$ .

De même, notons  $h(\alpha)$  le plus petit indice de  $[k]$  "occupé" par un monomino ou domino. Si le pavage  $\alpha$  est vide, on convient  $h(\alpha) = \infty$ .

Comme  $(\omega, \alpha, \beta) \notin G_{n,k,\ell}$ , les indices  $h(\omega)$  et  $h(\alpha)$  ne peuvent être infinis à la fois. Il y a donc les deux cas possibles suivants:

- (i)  $h(\alpha) - 1 \leq h(\omega)$ ,
- (ii)  $h(\alpha) - 1 > h(\omega)$ .

Dans le premier cas,  $h(\alpha)$  est fini et on définit  $(\omega', \alpha', \beta')$  avec  $\beta' = \beta$ ,  $\alpha'$  est le pavage obtenu à partir de  $\alpha$  en "enlevant" la pièce (monomino ou domino) "occupant" l'indice  $h(\alpha)$ . D'après (i), les  $h(\alpha) - 1$  premiers pas du chemin  $\omega$  sont des pas Nord-Est. On définit alors  $\omega'$  en "insérant" dans  $\omega$ , après les  $h(\alpha) - 1$  premiers pas un pas Est si la pièce retirée de  $\alpha$  est un monomino, ou un pas Nord-Est suivi d'un pas Sud-Est (ou chevron) si la pièce retirée

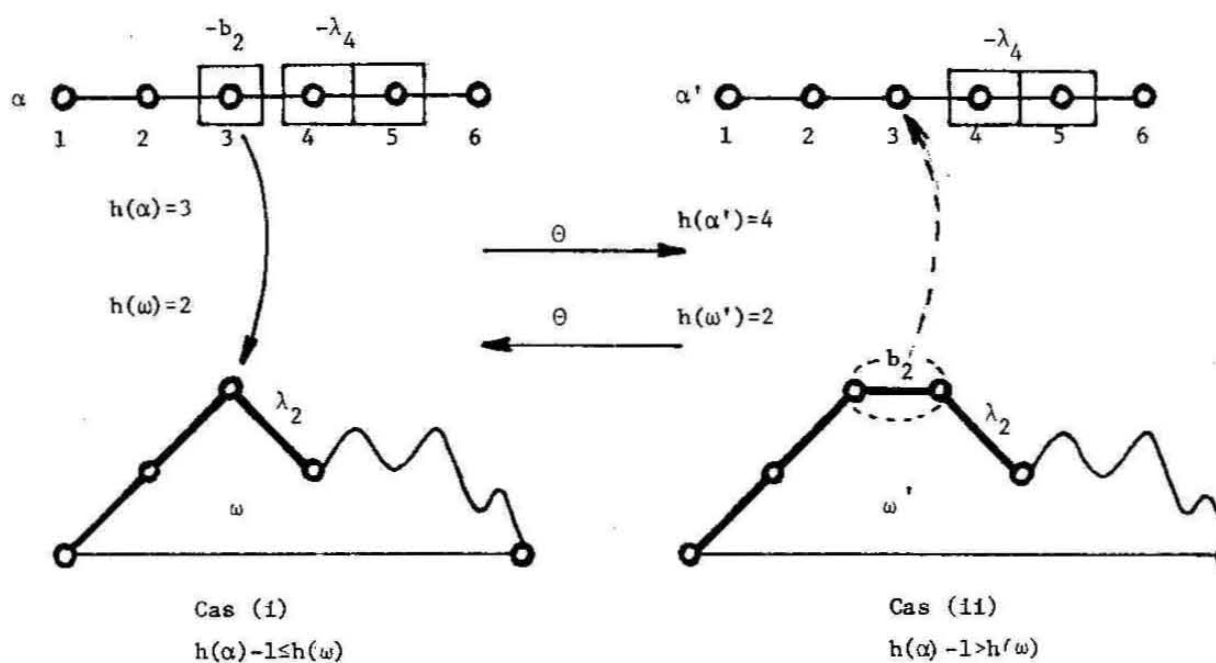


Figure 4. La bijection  $\Theta$ , cas monomino.

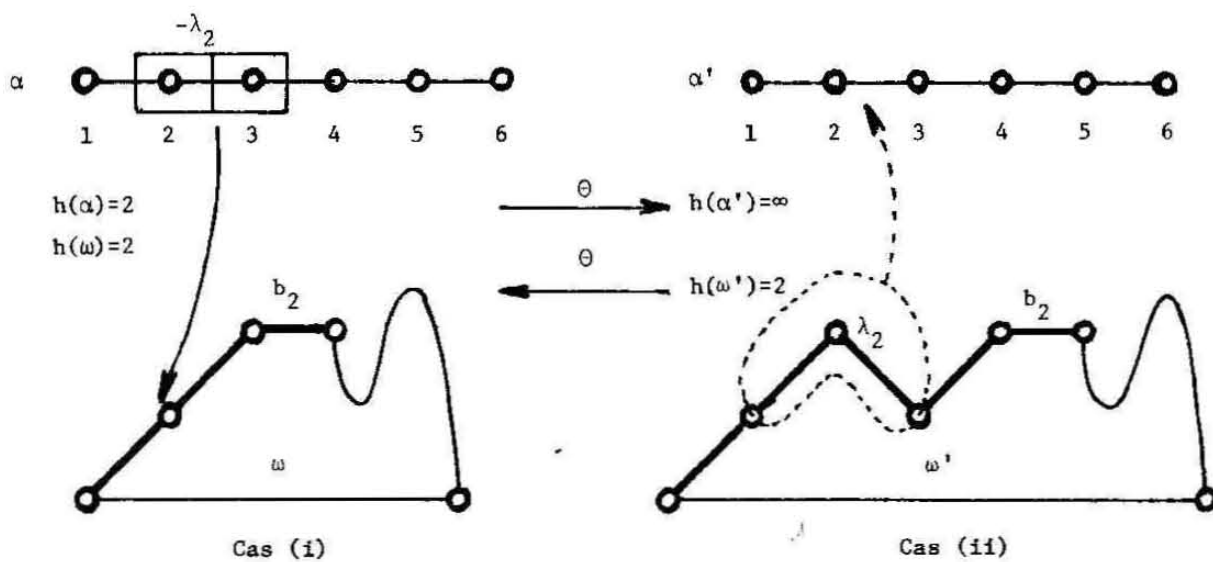


Figure 5. La bijection  $\Theta$ , cas domino.

de  $\alpha$  est un domino (voir (figures 4 et 5)).

Il est clair que dans la transformation ainsi définie  $\Theta(\omega, \alpha, \beta) = (\omega', \alpha', \beta')$  la valuation totale est conservée, au changement de signe près, c'est-à-dire que l'on a (20).

Maintenant si  $(\omega, \alpha, \beta)$  est dans le cas (ii),  $h(\omega)$  est fini et on définit  $\Theta(\omega, \alpha, \beta) = (\omega', \alpha', \beta')$  avec  $\beta' = \beta$ ,  $\omega'$  est le chemin obtenu à partir de  $\omega$  en "enlevant" le premier pas qui est Est ou Sud-Est (celui-ci est au niveau  $h(\omega)$ ). De plus si ce premier pas est Sud-Est, on enlève également le pas Nord-Est le précédant. Les entiers  $h(\omega)$  et  $h(\omega)+1$  sont des points isolés de  $\alpha$ . On peut donc définir un pavage  $\alpha'$  obtenu en rajoutant un monomino en position  $h(\omega)+1$  (resp. domino  $\{h(\omega), h(\omega)+1\}$ ) si le premier pas non Nord-Est de  $\omega$  est Est (resp. Sud-Est), (voir figures 4 et 5).

Il est clair que  $(\omega', \alpha', \beta')$  vérifie encore la condition (20).

Il est clair que si  $(\omega, \alpha, \beta)$  est dans le cas (i) (resp. (ii)), alors  $\Theta(\omega, \alpha, \beta)$  est dans le cas (ii) (resp. (i)). Le lecteur vérifiera aisément que  $\Theta$  est une involution de  $E_{n,k,\ell} \setminus G_{n,k,\ell}$  sur lui-même, satisfaisant (20).

On aurait pu définir dualement une involution  $\Theta'$  de  $E_{n,k,\ell} \setminus D_{n,k,\ell}$ . Maintenant il est aisé de prolonger l'involution  $\Theta$  en une involution de  $E_{n,k,\ell} \setminus F_{n,k,\ell}$  sur lui-même satisfaisant (20). Pour  $(\omega, \alpha, \beta) \in (E_{n,k,\ell} \setminus F_{n,k,\ell}) \cap D_{n,k,\ell}$  il suffit de définir  $\Theta(\omega, \alpha, \beta) = \Theta'(\omega, \alpha, \beta)$ .

Q.E.D.

Nous avons ainsi prouvé bijectivement la relation (16). En appliquant cette bijection au cas  $n = 0$ , on a une preuve bijective de la relation

d'orthogonalité (17).

Des corollaires immédiats de la relation (16) sont les suivantes

Corollaire 20- Avec les notations précédentes, si  $\mathbb{K}$  est un corps et si pour tout  $k \geq 0$ ,  $\lambda_k \neq 0$  (c'est-à-dire si la suite  $\{P_k(x)\}_{k \geq 0}$  est orthogonale pour  $f$ ), on a les relations suivantes:

$$(21) \quad \lambda_k = \frac{f(P_k^2(x))}{f(P_{k-1}^2(x))} = \frac{f(x^k P_k(x))}{f(x^{k-1} P_{k-1}(x))} ,$$

$$(22) \quad b_k = \frac{f(x P_k^2(x))}{f(P_k^2(x))} .$$

Chapitre II - Moments de familles particulières de polynômes orthogonaux.

Ce chapitre est un chapitre d'exemples. Nous considérons les cas particuliers suivants: les polynômes de Tchebycheff (1<sup>ère</sup> et 2<sup>ième</sup> espèce), Laguerre, Hermite, Charlier et Meixner (1<sup>ère</sup> et 2<sup>ième</sup> espèce).

Une suite de polynômes orthogonaux particuliers  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  peut être définie par les coefficients  $\{a_{n,k}\}_{0 \leq k \leq n}$  des polynômes eux-mêmes, par leur série génératrice ordinaire  $\sum_{n \geq 0} P_n t^n$  ou exponentielle  $\sum_{n \geq 0} P_n \frac{t^n}{n!}$ , par leur suite  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$  de moments ou encore par les coefficients  $\{b_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$  apparaissant dans la réurrence linéaire (I-7).

Pour chacune des familles citées, nous montrons bijectivement l'équivalence des deux dernières caractérisations en utilisant l'identité fondamentale du chapitre I (Corollaire 19)

$$(1) \quad \mu_n = \sum_{|\omega|=n} v(\omega)$$

où la sommation est étendue à tous les chemins de Motzkin de longueur n.

Par exemple, dans le cas particulier où les coefficients  $b_k, \lambda_k$  sont des nombres entiers, nous interprétons le produit des entiers composant la valuation  $v(\omega)$  comme un certain nombre d'histoires (voir ci-dessous). A chaque histoire nous associons bijectivement un certain objet combinatoire  $\xi$  d'un ensemble fini  $M_n$ . Chacun des entiers  $b_k$  ou  $\lambda_k$  est considéré comme un certain nombre de choix possibles d'effectuer une étape de la construction de l'objet, chacune de ces étapes étant en correspondance avec un pas élémentaire du chemin  $\omega$ . Il ne reste alors plus qu'à montrer que les objets de  $M_n$  sont dénombrés par le moment  $\mu_n$ .

Si les polynômes  $P_n(x)$ , et donc les coefficients  $b_k, \lambda_k$  dépendent de certains paramètres, il suffira de pondérer les histoires et les objets combinatoires  $\xi$  de  $M_n$ .

Le cas des polynômes de Tchebycheff est trivial et ne nécessite pas la notion d'histoire. Nous le traitons au début.

§1. Polynômes de Tchelycheff.

Le polynôme de Tchelycheff de 2<sup>ème</sup> espèce  $U_n(x)$  est habituellement défini par la relation

$$(2) \quad \sin(n+1)\theta = \sin\theta U_n(\cos\theta) \quad , \quad n \geq 0.$$

Ces polynômes satisfont la récurrence

$$(3) \quad U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad U_0=1, \quad U_1=2x.$$

Les polynômes unitaires correspondant  $\hat{U}_n(x) = \frac{1}{2^n} U_n(x)$  satisfont donc la récurrence linéaire à trois termes avec  $b_k=0$ ,  $\lambda_k = \frac{1}{4}$ .

Les polynômes  $F_n(x) = U_n\left(\frac{x}{2}\right)$ , appelé parfois polynômes de Fibonacci, satisfont la récurrence linéaire avec  $b_k=0$ ,  $\lambda_k=1$ .

Il est donc clair d'après (1) que le moment d'ordre  $n$  de ces derniers polynômes est le nombre de chemins de Motzkin sans pas Est (chemin de Dyck) de longueur  $n$ . Ainsi  $\mu_{2n+1}=0$ ,  $\mu_{2n}=C_n$ , le nombre de Catalan  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ .

Le moment d'ordre  $n$  des  $\hat{U}_n(x)$  est alors  $\frac{C_n}{4^n}$ .

La relation d'orthogonalité des polynômes  $U_n(x)$  est habituellement écrite sous la forme

$$(4) \quad \int_{-1}^1 U_m(x) U_n(x) (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{mn}$$

D'après le chapitre I, il est clair que



$$(5) \quad F_n(x) = \sum_{\alpha} (-1)^k x^{n-2k},$$

où la sommation est étendue à tous les pavages du segment  $[n]$  n'utilisant que des dominos, et  $k$  est le nombre de ces dominos.

La série génératrice des polynômes  $U_n(x)$  est

$$(6) \quad \sum_{n \geq 0} U_n(x) t^n = (1 - 2xt + t^2)^{-1}.$$

Le polynôme de Tchebycheff de 1<sup>ère</sup> espèce  $T_n(x)$  est habituellement défini par la relation

$$(7) \quad \cos n\theta = T_n(\cos\theta)$$

d'où l'on déduit la récurrence

$$(8) \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad T_0=1, \quad T_1=x.$$

Les polynômes unitaires correspondant  $\hat{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$  satisfont la récurrence linéaire à trois termes avec les coefficients

$$(9) \quad b_k=0 \text{ pour } k \geq 0, \quad \lambda_k = \frac{1}{2} \text{ pour } k \geq 2, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}.$$

Ainsi le moment d'ordre  $2n$  de ces polynômes est

$$(10) \quad \mu_{2n} = \frac{1}{4^n} \sum_{\omega} 2^{k(\omega)},$$

où la sommation est étendue aux chemins de Dyck de longueur  $2n$  et  $k(\omega)$  est le nombre de pas Sud-Est au niveau 1.

Tout chemin de Dyck se décompose de manière unique en produit de chemins de Dyck

"primitifs" (c'est-à-dire dont les sommets autres que les extrémités sont à un niveau non nul). Le nombre de facteurs de cette décomposition est  $k(\omega)$  et à chacun de ces facteurs on peut faire subir une symétrie par rapport à l'axe horizontal  $y=0$ . D'autre part le binomial  $\binom{2n}{n}$  est le nombre de chemins de longueur  $2n$  allant du point  $(0,0)$  au point  $(2n,0)$  et n'utilisant que des pas Nord-Est ou Sud-Est. Il est aisé d'imaginer une preuve bijective de l'identité

$$(11) \quad \sum_{\omega} 2^{k(\omega)} = \binom{2n}{n},$$

où la sommation est la même qu'en (10). Ainsi le moment d'ordre  $n$  des polynômes de Tchebycheff  $T_n(x)$  est donné par

$$(12) \quad \mu_{2n} = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}, \quad \mu_{2n+1} = 0 \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Remarquons que la relation d'orthogonalité s'écrit habituellement

$$(13) \quad \int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{mn} \text{ si } n > 0 \\ = \pi \text{ si } m=n=0.$$

La série génératrice des polynômes  $T_n(x)$  est donnée par

$$(14) \quad \sum_{n \geq 0} T_n(x) t^n = \frac{1-xt}{1-2xt+t^2}.$$

Une autre suite de polynômes moins classiques sont les polynômes  $M_n(x)$  définis par les coefficients de la récurrence linéaire  $b_k=1$  pour  $k \geq 0$  et  $\lambda_k=1$  pour  $k \geq 1$ . Ces polynômes sont évidemment définis par

$$(15) \quad M_n(x) = \sum_{\alpha} x^{p(\alpha)},$$

où  $\alpha$  est un pavage de  $[n]$  en monominos et dominos. Leurs moments  $\mu_n$  sont les nombres de Motzkin  $M_n$  et on a

$$M_n(x) = U_n\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

§2. Histoires.

En vue des constructions combinatoires qui vont suivre, il est plus commode de changer la valuation  $v(\omega)$  des chemins de Motzkin en une autre, qui lui est équivalente.

Soient donc  $\{a_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{b_k\}_{k \geq 0}$  et  $\{c_k\}_{k \geq 1}$  trois suites d'éléments de l'anneau  $\mathbb{K}$ . Si  $\omega$  est un chemin de Motzkin, nous définissons la valuation  $v_1(\omega)$  par sa valeur pour les pas élémentaires : un pas Nord-Est (resp. Est, resp. Sud-Est) commençant au niveau  $k \geq 0$  est valué  $a_k$  (resp.  $b_k$ , resp.  $c_k$ ).

Pour  $k \geq 1$ , notons

$$(16) \quad \lambda_k = a_{k-1} c_k.$$

La valuation  $v(\omega)$  fait référence, comme au chapitre I, aux coefficients  $b_k$  et  $\lambda_k$ .

Si  $\omega$  est un chemin de Motzkin, il est clair que l'on peut associer deux à deux les pas Nord-Est et Sud-Est.

Il suffit d'associer à chaque pas Nord-Est allant du niveau  $k$  au niveau  $k+1$ , le pas Sud-Est correspondant à la première fois que le chemin redescend au niveau  $k$ .

On a ainsi la relation

$$(17) \quad v(\omega) = v_1(\omega).$$

Plus généralement, si  $\omega$  est un chemin de Motzkin allant du niveau  $k$  au niveau  $l \geq k$  (resp.  $l \leq k$ ),  $\omega$  se factorise de manière unique sous la forme

(18)  $\omega = \omega_k \eta_k \omega_{k+1} \dots \omega_\ell$ ,  $\omega_i = \triangle$

pour laquelle pour  $k, k \leq i \leq \ell$ ,  $\omega_i$  est un chemin de Motzkin (éventuellement vide) allant du niveau  $i$  au niveau  $i$ , tandis que pour  $k \leq i < \ell$ ,  $\eta_i$  est un pas élémentaire Nord-Est (resp. Sud-Est) au niveau  $i$  (voir figure 1). On déduit le lemme suivant

Lemme 1. Si  $\omega$  est un chemin de Motzkin allant du niveau  $k \geq 0$  au niveau  $\ell \geq 0$ , alors

- si  $k < \ell$ ,  $v_1(\omega) = (a_k \dots a_{\ell-1}) v(\omega)$ ,
- si  $k = \ell$ ,  $v_1(\omega) = v(\omega)$ ,
- si  $k > \ell$ ,  $v_1(\omega) = (c_k \dots c_{\ell+1}) v(\omega)$ .

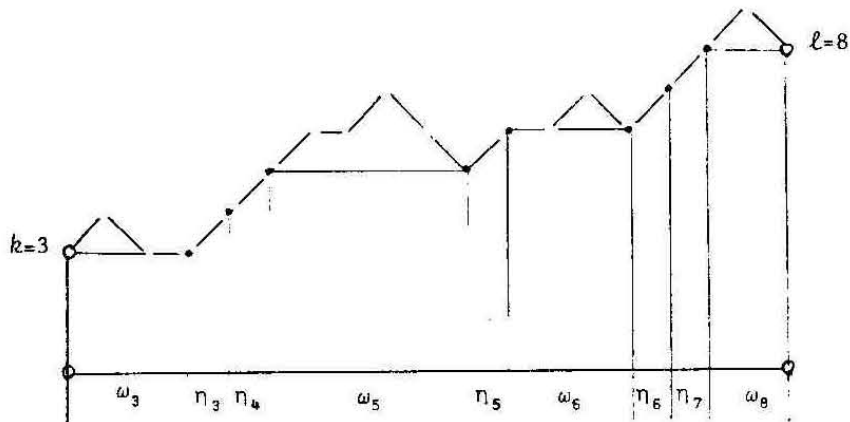


Figure 1. L'unique factorisation (18) d'un chemin de Motzkin allant de  $k$  à  $\ell \geq k$ .

Nous supposons maintenant que les suites  $\{a_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{b_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{c_k\}_{k \geq 1}$  sont des suites d'entiers  $\geq 0$ . Ces entiers sont appelés nombre de possibilités.

Définition 2. Une histoire  $h$  est la donnée d'un couple  $(\omega; (p_1, \dots, p_n))$  dans lequel  $\omega = (s_0, \dots, s_n)$  est un chemin de Motzkin de longueur  $n$  et la suite  $(p_1, \dots, p_n)$  est une suite d'entiers tels que

$$(19) \quad 1 \leq p_i \leq v_1(s_{i-1}, s_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq n.$$

La longueur de l'histoire est  $|h| = n$ . L'entier  $p_i$  est appelé ième choix de l'histoire.

Il est clair que le nombre d'histoires relatives à un chemin de Motzkin  $\omega$  n'est pas autre chose que  $v_1(\omega) = v(\omega)$ . L'entier  $\mu_n$  défini par (1) est le nombre d'histoires de longueur  $n$ .

Plus généralement, nous envisagerons également des coefficients  $a_k, b_k, c_k$  polynômes en variables formelles  $\alpha, \beta, \dots$  avec coefficients entiers positifs. La définition 2 est généralisée en remplaçant la valuation  $v_1(s_{i-1}, s_i)$  par sa valeur (entier  $\geq 0$ ) prise pour  $\alpha = 1, \beta = 1, \dots$

Nous parlerons alors d'histoires valuées (ou pondérées, pour ne pas confondre la valuation des nombre de possibilités avec celle  $v(\omega)$  du chemin de Motzkin).

§3- La bijection  $\pi \circ \Theta$  entre les histoires de Laguerre et les permutations.

Nous présentons ici la bijection fondamentale de ce chapitre entre les permutations et certaines histoires que nous appellerons histoires de Laguerre. Cette bijection est relative aux moments des polynômes de Laguerre. En restreignant cette bijection à des classes de permutations et en mettant des poids sur les nombres de possibilités, on obtient les moments des polynômes d'Hermite, Charlier, Meixner 1ère et 2ème espèce.

Définition 3. On appelle histoire de Laguerre une histoire  $h=(a; p_1, \dots, p_n)$  relative à la valuation

$$(20) \quad a_k = k+1, \quad b_k = 2k+2 \quad \text{pour } k \geq 0; \quad c_k = k+1 \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Nous allons démontrer que le nombre d'histoires de Laguerre de longueur  $n$  est  $(n+1)!$  en exhibant une bijection entre ces histoires et le groupe symétrique  $S_{n+1}$  des permutations sur  $[n+1]$ .

Nous rappelons d'abord la définition récursive classique d'arbre binaire. Un arbre binaire sur l'ensemble fini  $S \neq \emptyset$  est la donnée d'un triplet  $b=(g, x, d)$  dans lequel  $x$  est un élément distingué de  $S$  appelé racine,  $g$  (resp.  $d$ ) est un arbre binaire sur un ensemble  $G$  (resp.  $D$ ) tel que  $(G, \{x\}, D)$  soit une partition de  $S$  ( $G$  et  $D$  peuvent éventuellement être vides). Si  $S = \emptyset$ , l'ensemble vide est considéré comme arbre binaire sur  $S$ . L'arbre  $g$  (resp.  $d$ ) est appelé sous-arbre gauche (resp. droit) de  $b$ . La racine (si existe) de  $g$  (resp.  $d$ ) est le fils gauche (resp. fils droit) de  $x$ . Les éléments de  $S$  sont appelés sommets de  $S$ .

Un sommet  $s$  de  $b$  est appelé point double (resp. point simple, resp. feuille) ssi  $s$  a deux fils (resp. un seul fils, resp. pas de fils). Pour les points simples on distingue point simple à gauche ou à droite selon que l'unique fils est fils à gauche ou fils à droite.

Un arbre binaire est dit arbre binaire croissant ssi les sommets sont les entiers  $1, 2, \dots, n$  et si tout fils  $t$  d'un sommet  $s$  est plus grand que  $s$  (voir figure 2).

Il existe une bijection classique entre les permutations  $\mathfrak{S}_n$  et les arbres binaires croissants sur  $[n]$ . Nous considérons une permutation  $\sigma$  comme un mot  $\sigma = \sigma(1)\dots\sigma(n)$  écrit avec les lettres  $1, 2, \dots, n$ .

Si  $b$  est un arbre binaire croissant, nous définissons récursivement la projection  $\pi(b)$  comme le mot défini par

$$(21) \quad \begin{aligned} \text{si } b = \emptyset, \quad \pi(b) &= e \quad (\text{mot vide}), \\ \text{si } b = (g, x, d), \quad \pi(b) &= \pi(g)x\pi(d). \end{aligned}$$

Inversement, si  $w$  est un mot dont les lettres sont des entiers tous distincts et si  $m$  désigne la plus petite lettre du mot, on définit récursivement le déployé  $\delta(w)$  de  $w$  par la relation

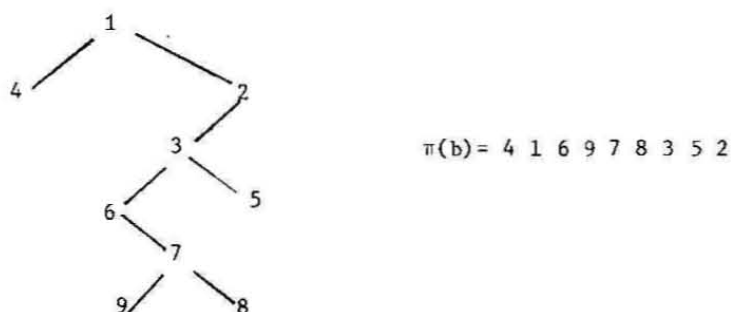
$$(22) \quad \begin{aligned} \delta(w) &= (\delta(u), m, \delta(v)) \quad \text{si } w = umv, \\ \delta(w) &= \emptyset \quad \text{si } w \text{ est le mot vide.} \end{aligned}$$



Il est classique que

Lemme 4. L'opérateur projection  $\pi$  défini par (21) est une bijection entre les arbres binaires croissants sur  $[n]$  et l'ensemble  $\mathfrak{S}_n$  des permutations sur  $[n]$ . La bijection inverse est l'opérateur déployé  $\delta$  défini par (22).

Un exemple est donné sur la figure suivante



arbre binaire croissant  $b$

Figure 2. La bijection  $\pi$  entre arbres binaires croissants et permutations.

Pour décrire la bijection entre histoires de Laguerre et permutations, il sera commode de "dédoubler" la valuation  $b_k = 2k+2$  en deux valuations définies par

$$(23) \quad b'_k = b''_k = k + 1 \quad \text{pour} \quad k \geq 0.$$

Cela revient à considérer des chemins de Motzkin colorés  $\omega_c$  c'est-à-dire des chemins de Motzkin  $\omega$  dont les pas Est sont colorés en deux couleurs: bleu et rouge. Les pas Est bleus (resp. rouges) sont valués par  $b'_k$  (resp.  $b''_k$ ). Les autres pas sont valués comme pour la valuation  $v_1$  par  $a_k$  et  $c_k$ .

La notation  $v_2(\omega_c)$  signifiera la valuation d'un chemin de Motzkin coloré par les 4 suites  $\{a_k\}$ ,  $\{b'_k\}$ ,  $\{b''_k\}$  et  $\{c_k\}$ .

Une histoire de Laguerre sera dorénavant considérée comme une paire  $h=(\omega_c; p_1, \dots, p_n)$  dans laquelle  $\omega_c$  est un chemin de Motzkin coloré et les  $p_i$  sont des choix vérifiant la relation (19) pour les valuations de Laguerre  $v_2(s_{i-1}, s_i)=a_k, b'_k, b''_k$  ou  $c_k$ , définies par (20) et (23). Il est clair que ceci ne modifie pas le nombre total d'histoires de longueur  $n$ .

Soit donc  $h=(\omega_c; p_1, \dots, p_n)$  une histoire de Laguerre de longueur  $n$  avec  $\omega_c=(s_0, \dots, s_n)$  chemin de Motzkin coloré.

Nous construisons un arbre binaire croissant  $b=\Theta(h)$  par le procédé récursif suivant.

Supposons construit pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq n-2$ , une suite d'arbres binaires  $\beta_0, \dots, \beta_i$  tels que chaque arbre  $\beta_j$  a des sommets étiquetés  $1, 2, \dots, j$  et certains autres sommets sans étiquette et qui sont des feuilles. Ces derniers sommets seront appelés sommets vacants. On suppose de plus que l'arbre obtenu à partir de  $\beta_j$  en enlevant les sommets vacants est un arbre binaire croissant. On suppose également que le nombre de sommets vacants de  $\beta_j$  est  $1+k$  si  $k$  désigne le niveau du sommet  $s_j$ .

On ordonne ces sommets vacants de gauche à droite, c'est-à-dire selon l'ordre donné par la projection  $\pi$ .

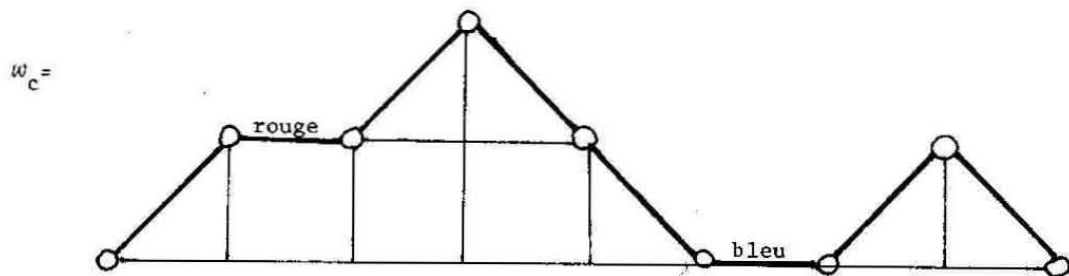
On construit alors l'arbre binaire  $\beta_{i+1}$  de la façon suivante.

Pour  $l=p_{i+1}$ , le  $l$ ème sommet pendant de  $\beta_i$  (qui existe d'après l'hypothèse de récurrence) est étiqueté  $(i+1)$ . De plus on ajoute à ce sommet un fils à gauche (resp. fils à droite, resp. deux fils) si  $(s_i, s_{i+1})$  est un pas Est coloré rouge, (resp. pas Est coloré bleu, resp. pas Nord-Est). Ce ou ces nouveaux sommets sont vacants.

L'arbre  $\beta_{i+1}$  ainsi obtenu vérifie l'hypothèse de récurrence. Ainsi en partant de  $\beta_0$  l'arbre binaire ayant un seul sommet et tel que ce sommet est vacant, on construit un arbre binaire  $\beta_n$  ayant un et seul sommet vacant. On étiquette alors ce sommet  $n+1$  et obtient l'arbre  $\beta_{n+1} = \Theta(h)$ . On démontre alors sans difficulté

Proposition 5. L'application  $\Theta$  définie ci-dessus est une bijection entre les histoires de Laguerre de longueur  $n$  et les arbres binaires croissants ayant  $n+1$  sommets.

Exemple 6. On définit  $h=(\omega_c; p_1, \dots, p_8)$  comme indiqué sur la figure 3. L'arbre  $\Theta(h)$  est celui de la figure 2.



$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$v(s_{i-1}, s_i)$	1	2	2	3	2	1	1	2
$p_i$	1	2	2	1	2	1	1	2

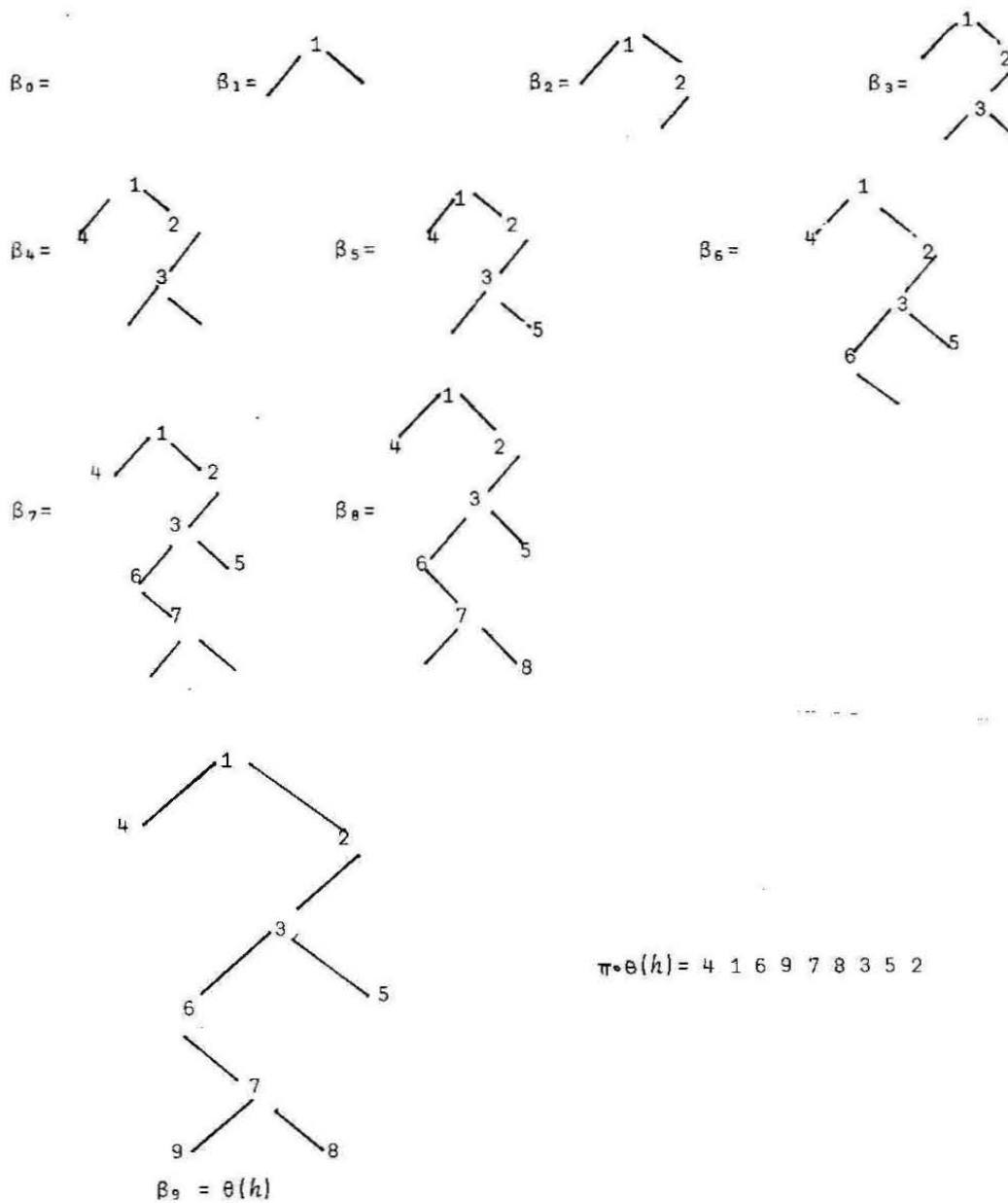


Figure 3 - La bijection  $\theta$  entre histoires de Laguerre et arbres binaires croissants.

En composant les bijections  $\theta$  et  $\pi$ , on obtient la bijection cherchée entre les histoires de Laguerre de longueur  $n$  et les  $(n+1)!$  permutations de  $\mathcal{S}_{n+1}$ .

§4- Propriétés de la bijection  $\pi \circ \theta$ 

En vue des exemples de polynômes orthogonaux considérés ci-dessous, nous aurons besoin de quelques propriétés des bijections  $\theta$  et  $\pi$ , que nous rappelons maintenant. Le lecteur en établira aisément les preuves (ou se référera à Françon-Viennot 1979).

Notations et définitions relatives aux permutations.

Soit  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_n$ . Rappelons que  $\sigma$  est considérée comme un mot  $\sigma(1)\dots\sigma(n)$ . Nous faisons la convention  $\sigma(0) = \sigma(n+1) = 0$ .

Soit  $x$  un élément de  $[n]$ . Nous distinguons quatre cas selon les valeurs  $\sigma(i-1)$  et  $\sigma(i+1)$  "entourant" la valeur  $x = \sigma(i)$  dans le mot  $\sigma$ . Nous dirons que  $x$  est un (ou une)

pic ssi  $\sigma(i-1) < x = \sigma(i) > \sigma(i+1)$ ,

creux ssi  $\sigma(i-1) > x = \sigma(i) < \sigma(i+1)$ ,

double montée ssi  $\sigma(i-1) < x = \sigma(i) < \sigma(i+1)$ ,

double descente ssi  $\sigma(i-1) > x = \sigma(i) > \sigma(i+1)$ .

Lorsque  $x = \sigma(i) < \sigma(i+1)$  (c'est-à-dire creux ou double montée) la valeur  $x$  est une montée. Dans le cas contraire (soit pic ou double *descente* montée)  $x$  est une descente.

Un élément  $x$  est dit élément saillant (inférieur) gauche (resp. droit) ssi  $x = \sigma(i)$  est le plus petit des éléments  $\sigma(1), \dots, \sigma(i)$  (resp.  $\sigma(i), \sigma(i+1), \dots, \sigma(n)$ ).

Ce mot "saillant" sous-entendra saillant inférieur gauche.

Pour  $x \in [n]$ , nous définissons la x-factorisation de  $\sigma$  comme l'unique factorisation du mot  $\sigma$  sous la forme

$$(24) \quad \sigma = u\lambda(x)x\rho(x)v ,$$

dans laquelle les mots (éventuellement vides) ont toutes leurs lettres  $> x$  et telle que si  $u$  (resp.  $v$ ) est non vide, la dernière (resp. première) lettre de  $u$  (resp.  $v$ ) est  $< x$ .

Pour  $x \in [n]$ , la x-décomposition de  $\sigma$  est l'unique factorisation du mot  $\sigma$  sous la forme

$$(25) \quad \sigma = u_1 v_1 \dots u_k v_k u_{k+1} , \quad k \geq 1 ,$$

dans laquelle les  $u_i$  et  $v_j$ , sauf éventuellement  $u_1$  et  $u_{k+1}$  sont des mots non vides, les mots  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq k+1$  (resp.  $v_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ ) ont leurs lettres  $< x$  (resp.  $\geq x$ ).

Exemple 7. Pour  $\sigma = 416978352$  et  $x = 3$ , la  $x$ -factorisation  $\sigma = u\lambda(x)x\rho(x)v$  est  $u = 41$ ,  $\lambda(x) = 6978$ ,  $\rho(x) = 5$ ,  $v = 2$ . La  $x$ -décomposition est  $\sigma = u_1 v_1 u_2 v_2 u_3$  avec  $u_1 = e$ ,  $v_1 = 4$ ,  $u_2 = 1$ ,  $v_2 = 697835$ ,  $u_3 = 2$ .

Notations et définitions relatives aux arbres binaires

Nous avons déjà défini la notion de point double, point simple (à gauche ou à droite) et de feuille d'un arbre binaire  $b$ .

Un arbre binaire complet est un arbre binaire n'ayant pas de points simples.

La branche gauche de l'arbre  $b$  est la suite des sommets  $x_1, \dots, x_p$  définie par les conditions:  $x_1$  est la racine de  $b$ , pour tout  $i$ ,  $1 < i \leq p$ ,  $x_p$  est le fils gauche de  $x_{p-1}$ , le sommet  $x_p$  n'a pas de fils gauche. On définirait dualement la branche droite de  $b$ .

On a la notion de sous-arbre (gauche ou droit) enraciné en  $x$ , sommet de  $b$ .

Propriétés de la bijection  $\pi = \delta^{-1}$ .

Lemme 8. Soit  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_n$ ;  $\delta(\sigma)$  son déployé,  $x \in [n]$  et  $\sigma = u\lambda(x)x\rho(x)v$  la  $x$ -factorisation de  $\sigma$ . Le sous-arbre gauche (resp. droit) du sommet  $x$  de  $\delta(\sigma)$  est le déployé  $\delta(\lambda(x))$  (resp.  $\delta(\rho(x))$ ).

Corollaire 9 - Soit  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_n$ ,  $\delta(\sigma)$  son déployé et  $x \in [n]$ . Le sommet  $x$  de  $\delta(\sigma)$  est une feuille (resp. point double, resp. point simple à droite, resp. point simple à gauche) ssi  $x$  est un pic (resp. creux, resp. double montée, resp. double descente) de la permutation  $\sigma$ .

Lemme 10 - Soit  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_n$  et  $\delta(\sigma)$  son déployé. La branche gauche  $\{x_1, \dots, x_k\}$  de  $\delta(\sigma)$  est la suite  $x_1 > \dots > x_k$  des éléments saillants

(inférieurs gauches) de  $\sigma$ .

Propriétés de la bijection  $\pi \circ \theta$ .

On déduit du corollaire 9 la

Proposition 11 - Soit  $h = (\omega_c; p_1, \dots, p_n)$  une histoire de Laguerre de longueur  $n$  et  $\sigma$  la permutation  $\sigma = \pi \circ \theta(h) \in \mathfrak{S}_{n+1}$ . La valeur  $x \in [n]$  est un pic (resp. creux, double montée, double descente) de  $\sigma$  ssi le  $x^{\text{ième}}$  pas élémentaire  $(s_{x-1}, s_x)$  du chemin de Motzkin coloré  $\omega_c$  est Sud-Est (resp. Nord-Est, resp. Est bleu, resp. Est rouge).

Appelons élément pseudo-saillant (à gauche) d'une permutation  $\sigma$  un élément  $x = \sigma(k)$  tel que il n'existe pas deux indices  $i, j$  vérifiant

$$(26) \quad 1 \leq i < j < k, \quad \sigma(j) < \sigma(k) = x < \sigma(i).$$

En particulier tout élément saillant est pseudo-saillant.

Lemme 12 - Soit  $h = (\omega_c; p_1, \dots, p_n)$  une histoire de Laguerre. L'élément  $x \in [n]$  est un élément pseudo-saillant de  $\sigma = \pi \circ \theta(h)$  ssi le  $x^{\text{ième}}$  choix vérifie  $p_x = 1$ .

Lemme 13 - Soit  $h = (\omega_c; p_1, \dots, p_n)$  une histoire de Laguerre. La première lettre  $x = \sigma(1)$  de  $\sigma = \pi \circ \theta(h)$  est le plus petit entier  $i \in [n+1]$  vérifiant la condition

$$(27) \quad \begin{array}{l} \text{soit } i = n + 1, \quad \text{soit } i \in [n] \text{ avec } p(i) = 1 \\ \text{et le } i^{\text{ème}} \text{ pas } (s_{i-1}, s_i) \text{ est Sud-Est ou Est bleu} \end{array}$$

On déduit alors du lemme 13 et du lemme 9 la



Proposition 14. Soit  $h = (\omega_c; p_1, \dots, p_n)$  une histoire de Laguerre. Les éléments saillants à gauche de la permutation  $\sigma = \pi \circ \theta(h)$  sont les entiers  $x$  vérifiant les deux conditions

- (i)  $x = n + 1$  ou  $1 \leq x \leq n$  et  $p_x = 1$   
(ii) aucun entier  $i$ ,  $1 \leq i < x$  ne vérifie (27).

On aurait les propositions duales des lemmes 12, 13 et de la proposition 15, en remplaçant gauche par droite, première lettre par dernière lettre, rouge par bleu et  $p_x = 1$  par  $p_x = v_2(s_{x-1}, s_x)$  (choix maximum possible).

Le lemme 12 est un cas particulier d'une propriété plus générale, permettant de construire la bijection réciproque de  $\theta$ .

Proposition 15. Soit  $h = (\omega_c; p_1, \dots, p_n)$  une histoire de Laguerre,  $x \in [n]$  et  $\sigma = u_1 v_1 \dots u_k v_k u_{k+1}$  la  $x$ -décomposition (25) de la permutation  $\sigma = \pi \circ \theta(h)$ . L'élément  $x$  est lettre d'un unique mot  $v_j$ . Alors  $p_x = j$ .

On définirait de même les éléments saillants supérieurs gauches (resp. droits) d'une permutation  $\sigma$  comme les entiers  $x \in [n]$  tel que  $x = \sigma(i)$  est le plus grand des entiers  $\sigma(1), \dots, \sigma(i)$  (resp.  $\sigma(i), \sigma(i+1), \dots, \sigma(n)$ ). Il est clair que

Lemme 16. Un élément  $x$  de la permutation  $\sigma$  est saillant supérieur gauche ssi  $x$  est un pic ou une double montée et est un élément pseudo-saillant.

On en déduit

Corollaire 17. Soient  $h = (\omega_c; p_1, \dots, p_n)$  une histoire de Laguerre et  $x \in [n]$ .

L'élément  $x$  est un élément saillant supérieur gauche de la permutation

$\sigma = \pi \circ \theta(h) \in \mathfrak{S}_{n+1}$  ssi on a les deux conditions

(i)  $p_x = 1,$

(ii) le pas  $(s_{x-1}, s_x)$  est Sud-Est ou Est bleu.

85 - Polynômes de Laguerre.

Les polynômes (unitaires) de Laguerre  $L_n^{(\alpha)}(x)$  peuvent être définis par l'une quelconque des six conditions suivantes

$$(28) \quad (\text{coefficients}) \quad L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} (\alpha+1+k)_{n-k} (-x)^k,$$

$$(29) \quad (\text{fonction génératrice}) \quad \sum_{n \geq 0} L_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} = (1+t)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{xt}{1+t}\right),$$

$$(30) \quad (\text{récurrence linéaire}) \quad b_k = 2k + \alpha + 1, \quad \lambda_k = k(k+\alpha)$$

$$(31) \quad (\text{orthogonalité}) \quad \int_0^\infty L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx = n! \Gamma(n+\alpha+1) \delta_{mn}$$

(pour  $\alpha$  réel  $> -1$ ),

Cette dernière relation équivaut à se donner les moments  $\mu_n$  (le paramètre  $\alpha$  est alors considéré comme une variable formelle)

$$(31') \quad (\text{moments}) \quad \mu_n = (\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n) = (\alpha+1)_n,$$

$$(32) \quad (\text{formule de Rodrigues}) \quad L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}).$$

Remarquons que nous parlerons toujours des polynômes de Laguerre mis sous forme unitaire. Habituellement on définit les polynômes de Laguerre par  $\frac{(-1)^n}{n!} L_n^{(\alpha)}(x)$ , ou parfois aussi  $(-1)^n L_n^{(\alpha)}(x)$ .

Particulièrement importantes sont les valeurs  $\alpha = 0$  et  $\alpha = 1$ .

Le polynôme de Laguerre  $L_n^{(0)}(x)$  est habituellement noté  $L_n(x)$ .

Si  $\alpha = 1$ , les coefficients  $b_k$  et  $\lambda_k$  de (30) sont exactement les valuations  $b_k = 2k + 2$  et  $\lambda_k = a_{k-1} c_k = k(k+1)$  définissant les histoires de Laguerre introduites au §3.

La bijection  $\pi \circ \theta$  prouve ainsi que les moments des polynômes de Laguerre  $L_n^{(1)}(x)$  sont les nombres  $\mu_n = (n+1)!$ , ce qui est bien en accord avec (31') pour  $\alpha = 1$ .

Nous interprétons maintenant le cas général.

Comme au paragraphe 3 dans le cas  $\alpha = 1$ , nous "dédoublons" la valuation  $v_1$  (des chemins de Motzkin) en une valuation  $v_2$  (sur les chemins de Motzkin colorés) définie par la relation

$$(33) \quad a_k = k + 1, \quad b_k' = k + \alpha, \quad b_k'' = k + 1 \text{ pour } k \geq 0, \text{ et } c_k = k + \alpha \text{ pour } k \geq 1.$$

Rappelons que  $b_k'$  correspond aux pas Est bleus, c'est-à-dire aux doubles montées de  $\sigma = \pi \circ \theta(h)$ .

Nous considérons ainsi des histoires de Laguerre pondérées  $h$ , c'est-à-dire des histoires de Laguerre au sens du §3 ( $\alpha=1$ ), munies d'un poide pour les nombres choix  $p_x$ .

Si le  $x^{\text{ième}}$  pas est un pas Sud-Est ou Est bleu à hauteur  $k$ , on distingue parmi les  $k + 1$  choix possibles, le plus petit  $p_x = 1$  qui est pondéré  $\alpha$ , les

autres  $2 \leq p_x \leq k+1$  sont pondérés 1. Pour les pas Nord-Est ou Est rouges, on ne change rien (poids 1).

D'après le corollaire 17, le poids  $\alpha$  va comptabiliser le nombre d'éléments saillants supérieurs gauches autres que  $n+1$  de la permutation  $\sigma = \pi \circ \theta(h)$ . Nous pouvons donc énoncer la relation

$$(34) \quad \alpha \sum_{\omega_c} v_2(\omega_c) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} \alpha^{s(\sigma)},$$

dans laquelle  $s(\sigma)$  désigne le nombre d'éléments saillants de la permutation  $\sigma$  et la première sommation est étendue à tous les chemins de Motzkin colorés de longueur  $n$ .

On a évidemment remarqué que la distribution des permutations selon le nombre d'éléments saillants supérieurs gauches est la même que celle décrite par  $s(\sigma)$ : il suffit de considérer la bijection  $\sigma \rightarrow \sigma^c$  (passage au complémentaire) avec  $\sigma^c(i) = n+1-\sigma(i)$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

D'autre part, il est bien connu que la distribution du paramètre  $s(\sigma)$  sur l'ensemble  $\mathfrak{S}_{n+1}$  est donné par la relation suivante (une preuve bijective est aisée en considérant la bijection entre les permutations et ce qu'on appelle les tables d'inversions)

$$(35) \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} \alpha^{s(\sigma)} = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n).$$

Nous avons ainsi démontré que le moment des polynômes de Laguerre définis par (30) est donné par la relation (31').

Remarquons que pour  $\alpha = 0$ , on obtient des valuations définies par la relation

$$(36) \quad a_k = k + 1, \quad b_k' = k, \quad b_k'' = k + 1 \text{ pour } k \geq 0, \text{ et } c_k = k \text{ pour } k \geq 1.$$

Définition 18 - Les histoires  $h = (\omega_c; p_1, \dots, p_n)$  associées aux valuations (36) seront appelées histoires de Laguerre restreintes.

Par opposition, les histoires de Laguerre définie au §3 seront appelées aussi histoires de Laguerre larges.

La restriction provient du fait que le nombre de choix possibles correspondant à un pas Sud-Est (pic) ou un pas Est bleu (double montée) est diminué d'une unité. On peut toujours convenir que le choix ainsi interdit (relativement aux histoires de Laguerre larges) est  $p_x = 1$ . Nous conviendrons toujours dans la suite que le choix  $p_x$ , relatif à un pas Sud-Est ou Est bleu au niveau  $k$  d'une histoire restreinte est tel que  $2 \leq p_x \leq k + 1$ , et non  $1 \leq p_x \leq k$ .

D'après le lemme 13, cette restriction de choix dans une histoire  $h$  de longueur  $n$  revient à dire que la permutation associée  $\sigma = \pi \circ \theta(h) \in \mathfrak{S}_{n+1}$  est telle que  $\sigma(1) = n + 1$ .

Ainsi le nombre d'histoires de Laguerre restreintes de longueur  $n$  est bien  $n!$ , le moment d'ordre  $n$  des polynômes de Laguerre  $L_n(x) = L_n^{(0)}(x)$ .

Dorénavant, nous conviendrons que pour les histoires restreintes

$\sigma = \pi \circ \theta(h)$  est une permutation de  $\mathfrak{S}_n$ , c'est-à-dire que la valeur  $n + 1$  n'est pas rajoutée à la fin de la construction. L'arbre binaire croissant  $\theta(h)$  est ainsi un arbre binaire ayant  $n$  sommets étiquetés  $1, 2, \dots, n$  et un sommet vacant: le dernier sommet de la branche gauche.

Pour la comptabilisation des pics, creux, doubles montées et doubles descentes, notons que l'on doit alors adopter la convention

$$(37) \quad \text{pour } \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \sigma(0) = n + 1, \quad \sigma(n+1) = 0$$

Pour tous les polynômes qui vont suivre, c'est en fait les histoires de Laguerre restreintes qui s'avèrent beaucoup plus commodes pour interpréter les moments.

Nous réinterprétons les moments des polynômes de Laguerre  $L_n^{(\alpha)}(x)$  en termes d'histoires restreintes.

Pour ceci, le "bon" paramètre est en fait  $\beta = \alpha + 1$  et nous définissons la pondération suivante des histoires de Laguerre

$$(38) \quad a_k = k + \beta, \quad b_k' = k, \quad b_k'' = k + \beta, \quad \text{pour } k > 0, \quad \text{et } c_k = k \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Ceci est une pondération en  $\alpha$  des histoires larges: pour  $\alpha = 1$  on retrouve les valuations (20), (23). C'est aussi une pondération en  $\beta$  des histoires restreintes: pour  $\beta = 1$  (soit  $\alpha = 0$ ) on retrouve les valuations (36).

Nous avons introduit la pondération (33) à des fins pédagogiques. Bien que celle-ci soit plus "naturelle" que (38), nous utiliserons dorénavant toujours la pondération (38) et les histoires restreintes. Le lecteur verra au chapitre III tout l'intérêt de cette distinction entre histoires larges et histoires restreintes.

Avec les pondérations (38), il est clair que  $\beta$  comptabilise le nombre de sommets étiquetés de la branche gauche de  $\theta(h)$  (qui ne peuvent être que des points doubles ou points simples à gauche). Ainsi  $\beta$  comptabilise le nombre d'éléments saillants de  $\pi \circ \theta(h)$  et donc le moment  $\mu_n$  des polynômes de Laguerre  $L_n^{(\alpha)}(x)$  est  $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \beta^{s(\sigma)}$  (avec  $\beta=1+\alpha$ ). On retrouve bien la forme classique (35).



86 - Polynômes d'Hermite

Les polynômes (unitaires) d'Hermite sont définis par l'une des six conditions suivantes

$$(39) \quad (\text{coefficients}) \quad H_n(x) = \sum_{0 \leq 2k < n} (-1)^k \frac{n!}{2^k k! (n-2k)!} x^{n-2k},$$

$$(40) \quad (\text{fonction génératrice}) \quad \sum_{n \geq 0} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = \exp(tx - \frac{t^2}{2}),$$

$$(41) \quad (\text{récurrence linéaire}) \quad b_k = 0, \lambda_k = k,$$

$$(42) \quad (\text{orthogonalité}) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2/2} dx = n! \sqrt{\pi} \delta_{mn},$$

Cette dernière relation équivaut à dire

$$(42') \quad (\text{moments}) \quad \mu_{2n+1} = 0, \quad \mu_{2n} = 1.3 \dots (2n-1),$$

$$(43) \quad (\text{formule de Rodrigues}) \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2}).$$

Remarquons que le coefficient

$$(44) \quad h_{n,k} = \frac{n!}{2^k k! (n-2k)!}$$

est le nombre d'involutions  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  ayant  $k$  cycles de longueur 2 (c'est-à-dire  $n-2k$  points fixes  $\sigma(x)=x$ ).

Remarquons aussi que le moment  $\mu_n$  d'ordre  $n$  est le nombre d'involutions sans points fixes de  $\mathfrak{S}_n$ .

Nous considérons les histoires de Laguerre (restreintes)  $h = (\omega_c, p_1, \dots, p_n)$  soumises aux restrictions suivantes

- (i)  $\omega_c$  n'a pas de pas Est,
- (ii) si  $(s_{x-1}, s_x)$  est un pas Nord-Est, alors  $p_x = 1$ ,

De telles histoires seront appelées histoires d'Hermite. Il est clair que leur nombre est  $\sum_{|\omega|=n} v(\omega)$ , où  $v$  est la valuation définie par (41).

On vérifie aisément d'après le lemme 13 et les propositions 13 et 14, que  $\Theta$  met en correspondance bijective les histoires d'Hermite de longueur  $2n$  avec les arbres binaires croissants complets étiquetés avec  $1, 2, \dots, 2n$ , ayant le dernier sommet de la branche gauche non étiqueté (vacant) et tels que tout point double appartient à la branche gauche.

De tels arbres ont la forme de "peigne" comme indiqué sur la figure 4, et sont trivialement en bijection avec les involutions sans points fixes  $\sigma$  de  $\mathfrak{S}_{2n}$ . Les cycles de longueur 2 de  $\sigma$  correspondent aux couples  $(s,t)$  dans lequel  $s$  est un élément de la branche gauche et  $t$  est le fils droit de  $s$ . Pour retrouver l'arbre correspondant à une involution sans point fixe, il suffit d'ordonner les cycles selon leur plus petit élément.

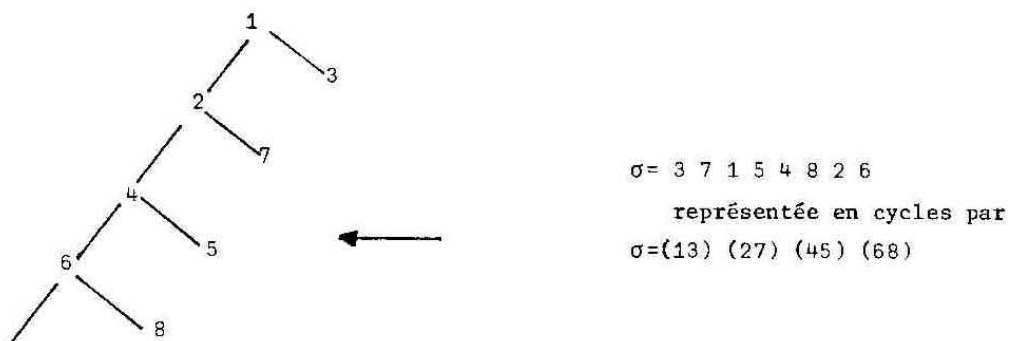


Figure 4. Une involution sans point fixe codée par un arbre "peigne".

Ainsi nous avons démontré que les polynômes d'Hermite définis par (41) ont pour moments les  $\mu_n$  définis par (42').

57. Polynômes de CHARLIER

Les polynômes (unitaires) de Charlier  $C_n^{(a)}(x)$  sont définis par l'une des six conditions suivantes

$$(45) \text{ (coefficients)} \quad C_n^{(a)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{x}{k} k! (-a)^{n-k} ,$$

$$(46) \text{ (fonction génératrice)} \quad \sum_{n \geq 0} C_n^{(a)}(x) \frac{t^n}{n!} = e^{-at} (1+t)^x ,$$

$$(47) \text{ (récurrence linéaire)} \quad b_k = k + a , \quad \lambda_k = ak ,$$

$$(48) \text{ (orthogonalité)} \quad \int_0^\infty C_m^{(a)}(x) C_n^{(a)}(x) d\psi^{(a)}(x) = a^n n! \delta_{mn} ,$$

où  $\psi^{(a)}$  est la fonction en escalier dont les sauts sont  $d\psi^{(a)}(x) = \frac{e^{-a} a^x}{x!}$  aux points  $x = 0, 1, 2, \dots$

Cette relation équivaut à dire

$$(48') \text{ (moments)} \quad \mu_n = \sum_{k=1}^n S(n, k) a^k ,$$

dans lequel  $S(n, k)$  désigne le nombre de Stirling de 2ème espèce, ou nombre de partitions de l'ensemble  $[n]$  en  $k$  parties. Les polynômes (en  $a$ ) de (48') sont classiquement les polynômes exponentiels.

$$(49) \text{ (Rodrigues)} \quad C_n^{(a)}(x) = (-1)^n a^{-x} \Gamma(x+1) \Delta^n \left[ \frac{a^x}{\Gamma(x-n+1)} \right] ,$$

où  $\Delta$  est le classique opérateur de différence finie.

Nous allons démontrer la relations (48') à partir de la relation (47).

Comme précédemment, nous considérons la valuation  $v_2$  (équivalente à la valuation  $v$  de (47)) suivante

$$(50) \quad a_k = a, \quad b_k' = k, \quad b_k'' = a, \quad \text{pour } k \geq 0 \quad \text{et } c_k = k \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Appelons histoire de Charlier une histoire de Laguerre (restreinte)

$h = (\omega_c; p_1, \dots, p_n)$  soumise à la contrainte

$$(51) \quad \text{si } (s_{i-1}, s_i) \text{ est un pas Nord-Est (creux) ou Est rouge} \\ \text{(double descente) alors } p_i = 1,$$

De plus de telles histoires sont pondérées: l'unique choix  $p_i = 1$  dans le cas d'un pas Nord-Est ou Est rouge est pondéré par la variable formelle  $a$ .

Il est aisé de montrer que l'application  $\Theta$  définit une bijection entre les histoires de Charlier de longueur  $n$  et les arbres binaires croissants  $b$  étiquetés  $1, 2, \dots, n$ , ayant le dernier sommet de la branche gauche non étiqueté (vacant) et tels que tout point double ou sommet simple à gauche est sur la branche gauche.

Il est clair que ces arbres binaires croissants  $b$  sont en bijection avec les partitions de l'ensemble  $[n]$ . En effet, pour toute partition de  $[n]$  en  $k$  parties  $P_1, \dots, P_k$ , il suffit d'ordonner les parties selon l'ordre décroissant de leur plus petit élément  $x_1 > \dots > x_k$ , puis d'écrire le mot  $\sigma = w_1, \dots, w_k$  dans lequel  $w_i$  est la suite des éléments de  $P_i$  mis sous forme croissante. Alors  $b = \delta(\sigma)$  est l'arbre en correspondance avec la partition (voir figure 5).

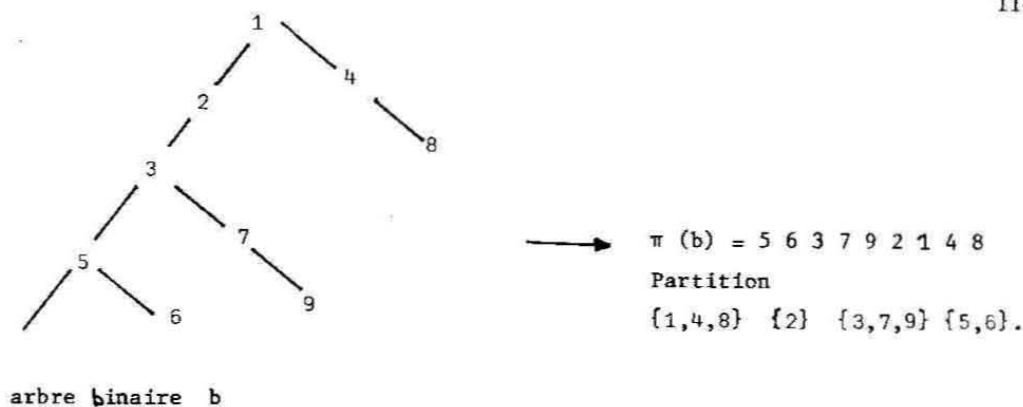


Figure 5. Un arbre binaire associé à une histoire de Charlier.

Il est clair que la variable  $a$  comptabilise la longueur de la branche gauche de  $b$ , c'est-à-dire le nombre de parties de la partition associée. Ainsi les moments des polynômes de Charlier  $C_n^{(a)}(x)$  sont bien donnés par (48').

On peut également décrire directement la bijection  $\Theta$  (restreinte aux histoires de Charlier) en termes de partitions.

Une partition est formée de blocs "fermés". En cours de construction certains blocs sont "ouverts", d'autres "fermés". Après avoir fait  $i$  pas élémentaires du chemin de Motzkin coloré  $\omega_c$ , si le pas  $(s_i, s_{i+1})$  est Sud-Est ou Est bleu on insère l'entier  $i + 1$  dans un des  $k$  blocs ouverts (il y a  $k$  possibilités de le faire). De plus, si le pas est Sud-Est, on ferme le bloc.

Les pas Nord-Est et Est rouge correspondent à créer un nouveau bloc (avec une seule possibilité) avec l'élément  $i + 1$ . Ce bloc est considéré comme ouvert (resp. fermé) si le pas est Nord-Est (resp. Est rouge). Les entiers choix  $p_i$  sont définis en ordonnant les blocs dans l'ordre inverse de l'ordre de création (remarquons que le premier bloc disponible correspond au choix  $p_i = 2$ , le choix  $p_i = 1$  étant réservé à la création de nouveaux blocs).

Exemple 19. L'arbre binaire  $b$  de la figure 5 correspond à l'histoire de Laguerre (restreinte)  $h = (\omega_c; p_1, \dots, p_n)$  définie sur la figure 6.

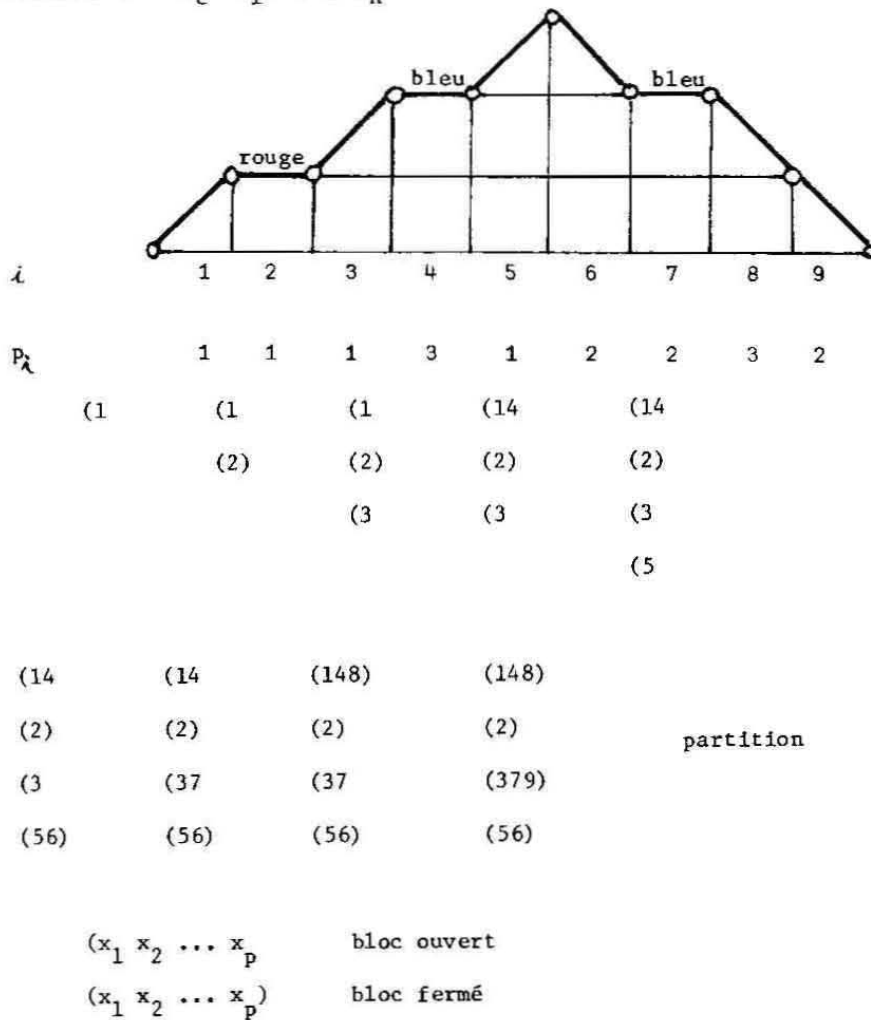


Figure 6. La bijection entre les histoires de Charlier et les partitions.

58. Polynômes de MEIXNER de première espèce

Les polynômes de Meixner de première espèce  $m_n(x; \beta, c)$  sont définis par l'une des relations suivantes

(52) (coefficients)  $m_n(x; \beta, c) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{-x-\beta}{n-k} c^{-k}$ ,

(53) (fonction génératrice)  $\sum_{n=0}^{\infty} m_n(x; \beta, c) \frac{t^n}{n!} = (1 - \frac{t}{c})^x (1-t)^{-x-\beta}$ ,

(54) (orthogonalité) pour  $0 < |c| < 1$ ,

$$\sum_{k \geq 0} m_n(x_k; \beta, c) m_p(x_k; \beta, c) \frac{c^{-k(\beta)k}}{k!} = (\frac{c}{c-1})^\beta c^{-n} n! (\beta)_n \delta_{np},$$

(54)' (orthogonalité) pour  $|c| > 1$ ,

$$\sum_{k \geq 0} m_n(x_k; \beta, c) m_p(x_k; \beta, c) \frac{c^{-k(\beta)k}}{k!} = (\frac{c}{c-1})^\beta c^{-n} n! (\beta)_n \delta_{np},$$

avec  $x_k = -k - \beta$  pour  $k \geq 0$ ,

(55) (Rodrigues)  $m_n(x; \beta, c) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\beta)} c^{-x-n} \Delta^n \left[ \frac{c^x \Gamma(x+\beta)}{\Gamma(x-n+1)} \right]$

Les polynômes de Meixner unitaires correspondants sont définis par

(56)  $\hat{m}_n(x; \beta, c) = (\frac{-c}{c-1})^n m_n(x; \beta, c)$ ,

et satisfont la récurrence linéaire avec coefficients

(57) (récurrence linéaire)  $b_k = \frac{(1+c)k+\beta c}{1-c}$ ,  $\lambda_k = \frac{ck(k+\beta-1)}{(1-c)^2}$ .

Nous allons montrer bijectivement que les moments  $\mu_n$  sont donnés par la relation (équivalente formellement à (54)).

(54'') (moments)  $\mu_n(\beta, c) = (1-c)^\beta \sum_{k \geq 0} k^n c^k \frac{(\beta)k}{k!}$ .



Remarquons que l'on a bien la convention  $\mu_0 = 1$ .

Afin d'avoir des valuations entières, nous posons

$$(58) \quad b_k^* = (1+c)k+\beta c \quad , \quad \lambda_k^* = ck(k+\beta-1) \quad \text{pour } k \geq 0.$$

Il est clair que pour tout chemin de Motzkin de longueur  $n$ , la valuation  $v(\omega)$  définie par (57) est reliée à la valuation  $v^*(\omega)$  définie par (58) par la relation

$$(59) \quad v(\omega) = \frac{1}{(1-c)^n} v^*(\omega) .$$

Maintenant nous remarquons qu'en faisant  $\beta = c = 1$ , les polynômes (en variables formelles  $\beta$  et  $c$ )  $b_k^*(\beta, c)$  et  $\lambda_k^*(\beta, c)$  deviennent

$$(60) \quad b_k^*(1,1) = 2k+1, \quad \lambda_k^*(1,1) = k^2 \quad \text{pour } k \geq 0.$$

On obtient les valuations (entières) relatives aux histoires de Laguerre restreintes. Nous sommes ainsi conduit à pondérer ces histoires avec les variables  $\beta$  et  $c$ . Plus précisément, on définit les valuations.

$$(61) \quad a_k^* = c(k+\beta), \quad b_k'^* = k, \quad b_k''^* = c(k+\beta) \quad , \quad \text{pour } k \geq 0 \quad \text{et } c_k = k \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Les valuations  $a_k^*$  et  $b_k^*$  correspondent aux creux ou doubles descentes de la permutation  $\sigma$ .

Ainsi la variable  $c$  comptabilise les descentes  $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , de  $\sigma$ . Notons qu'une descente supplémentaire est comptée pour  $\sigma(0) > \sigma(1)$  à cause de la convention (35). D'autre part, comme pour les histoires de Laguerre restreintes pondérées par (38), le paramètre  $\beta$  comptabilise les éléments saillants de  $\sigma$ .

On déduit la relation

$$(62) \quad \sum_{|\omega|=n} v^*(\omega) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \beta^{s(\sigma)} c^{d(\sigma)},$$

dans lequel  $d(\sigma)$  désigne le nombre de descentes de  $\sigma$  (et  $s(\sigma)$  le nombre d'éléments saillants).

En revenant à la valuation  $v$  avec la relation (59), on obtient les moments des polynômes de Meixner de première espèce

$$(63) \quad \mu_n = \frac{1}{(1-c)^n} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \beta^{s(\sigma)} c^{d(\sigma)}.$$

Pour  $\beta=1$ , le polynôme du second membre de (62) est le classique polynôme eulérien  $A_n(c)$ , de série génératrice

$$(64) \quad \sum_{n \geq 1} A_n(c) \frac{u^n}{n!} = c \frac{e^{u(1-c)} - 1}{1 - c e^{u(1-c)}}.$$

Il est classique que dans ce cas, le second membre de (63) devient

$$(65) \quad \frac{A_n(c)}{(1-c)^n} = (1-c) \sum_{k \geq 0} k^n c^k .$$

L'analogie de l'identité (65) avec le paramètre  $\beta$  est

$$(66) \quad \frac{1}{(1-c)^n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \beta^{s(\sigma)} c^{d(\sigma)} = (1-c)^\beta \sum_{k \geq 0} k^n c^k \frac{(\beta)_k}{k!} .$$

Cette identité est moins connue et C. Blais se doit d'en donner une preuve bijective, généralisant la preuve de (65) utilisant les "espèces de structures" de A. Joyal.

#### Polynômes de Meixner-Kreweras

Un cas particulier fort intéressant est obtenu en prenant  $\beta=1$  et  $c=\frac{1}{2}$ . On obtient alors des polynômes (unitaires)  $\hat{m}_n(x; 1, \frac{1}{2})$  que nous noterons  $K_n(x)$ . Ces polynômes ont été étudiés combinatoirement par Kreweras. Ils sont définis par la récurrence linéaire avec coefficients donnés par

$$(67) \quad b_k = 3k+1, \lambda_k = 2k^2, \quad k \geq 0.$$

D'après la théorie générale précédente, les moments de ces polynômes sont donnés par

$$(68) \quad \mu_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} 2^{d(\sigma)},$$

c'est-à-dire que  $\mu_n$  dénombre le nombre de "permutations colorées", c'est-à-dire les permutations de  $\mathfrak{S}_n$  telles que les descentes sont colorées en deux couleurs (bleu ou rouge). Ces objets sont trivialement en bijection avec les partitions ordonnées de  $[n]$  (ou préordre totaux).

Si  $\sigma$  est une permutation colorée, on "découpe" le mot  $\sigma$  en blocs en mettant une coupure après chaque montée et chaque descente bleue.

exemple. Pour  $\sigma = 2\ 4\ 9\ 7\ 3\ 1\ 10\ 8\ 6\ 5$

avec montées: 2, 4, 1,

descentes bleues: 7, 10,

descentes rouges: 9, 3, 8, 6,

la partition ordonnée associée est

$$\xi = (2) (4) (97) (31) (10) (8,6,5).$$

(les blocs sont écrits  $(x_1 > \dots > x_k)$  et ordonnés de gauche à droite).

Remarque 20. On peut aussi éviter le recours aux histoires de Laguerre pondérées par  $c=\frac{1}{2}$  et définir directement des histoires par les valuations (67) qui construisent les partitions ordonnées. Ces histoires ne sont pas un cas particulier des histoires de Laguerre, mais plutôt une généralisation de celles-ci, et elles contiennent aussi les histoires définies directement au §7 pour construire les partitions.

§9. Polynômes de Meixner de seconde espèce.

Les polynômes (unitaires) de Meixner de seconde espèce  $M_n(x; \delta, \eta)$  sont définis par l'une quelconque des relations suivantes

$$(69) \text{ fonction génératrice) } \sum_{n \geq 0} M_n(x) \frac{t^n}{n!} = [(1+\delta t)^2 + t^2]^{-\eta/2} \exp \left[ x \operatorname{arctg} \left( \frac{t}{1+\delta t} \right) \right],$$

(orthogonalité (pour  $\delta$  réel et  $\eta > 0$ ))

$$(70) \quad \int_{-\infty}^{\infty} M_k(x) M_n(x) w(x) dx = (\delta^2 + 1)^n n! (\eta)_n \int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx \delta_{kn},$$

$$\text{avec } w(x; \delta, \eta) = [\Gamma(\eta/2)]^{-2} |\Gamma(\frac{\eta+ix}{2})|^2 \exp(-x \operatorname{arctg} \delta),$$

$$(71) \quad (\text{récurrence linéaire}) \quad b_k = (2k+\eta)\delta, \quad \lambda_k = (\delta^2+1) k(k+\eta-1) \text{ pour } k \geq 0,$$

Nous allons démontrer (bijectivement) que les moments des polynômes de Meixner  $M_n(x; \delta, \eta)$  sont donnés par la relation

$$(72) \quad \mu_n(\delta, \eta) = \delta^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \eta^{s(\sigma)} \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)^{c(\sigma)},$$

dans lequel  $c(\sigma)$  désigne le nombre de creux de la permutation  $\sigma$  (avec la convention (37)), et  $s(\sigma)$  est le nombre d'éléments saillants de  $\sigma$ .

Nous définissons la valuation "dédoublée"  $v_2$  par la relation

$$(73) \quad a_k = (1+\delta^2)(k+\eta), \quad b'_k = \delta k, \quad b''_k = \delta(k+\eta) \text{ pour } k \geq 0,$$

$$c_k = k \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Les histoires à considérer sont, comme au §8, des histoires de Laguerre restreintes pondérées par  $\delta, \eta$  et  $(1+\delta^2)$ . On déduit ainsi

$$(74) \quad \mu_n(\delta, \eta) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \eta^{s(\sigma)} \delta^{dm(\sigma)+dd(\sigma)} (1+\delta^2)^{c(\sigma)},$$

dans lequel  $dm(\sigma)$  (resp.  $dd(\sigma)$ ) désigne le nombre de double montées (resp.

doubles descentes) de la permutation  $\sigma$ .

La relation (72) se déduit de (74) et de la relation suivante pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  (avec la convention (37))

$$(75) \quad n = dm(\sigma) + dd(\sigma) + 2z(\sigma).$$

Exemple 21. Un cas particulier intéressant est avec  $\delta=0$  et  $\eta=1$ . Dans ce cas on a  $b_k=0$  et  $\lambda_k = k^2$ . Le deuxième membre de (74) devient le nombre de permutations sans double montée ni double descente (avec la convention (37)). Ces permutations sont les permutations dites alternantes sur  $[2n]$  dénombrées par le classique nombre sécant  $E_{2n}$  (ou nombre d'Euler) de série génératrice

$$(76) \quad \sum_{n \geq 0} E_{2n} \frac{t^{2n}}{2n!} = \operatorname{sect} = \frac{1}{\cos t}.$$

Les polynômes orthogonaux  $M_n(x; 0, 1)$  ont une interprétation combinatoire. Le coefficient  $p_{n,k}$  de  $x^k$  est, au signe près, le nombre de permutations de  $\mathfrak{S}_n$  ayant  $k$  cycles de longueur impaire. Il est possible de démontrer ceci bijectivement en associant une permutation à toute "histoire de Favard", c'est-à-dire une histoire relative à un chemin de Favard avec la valuation  $b_k=0$ ,  $\lambda_k = k^2$ .

Chaque pas Nord-Est correspond à créer (avec une seule possibilité) un nouveau cycle (de longueur 1). Chaque pas Nord-Nord correspond à insérer deux valeurs dans un cycle déjà existant ou créer un nouveau cycle (de longueur 2).

Une autre façon de "réaliser" une telle histoire de Favard est de construire deux involutions. Appelons forme d'une involution  $\psi$  l'arbre binaire (non étiqueté) sous-jacent à l'ordre binaire croissant obtenu en prenant pour branche gauche la suite croissante des points fixes et des plus petits éléments des cycles de longueur 2, ces derniers sommets ayant pour fils droit l'autre élément du cycle correspondant. Alors,  $p_{n,k}$  est aussi, au signe près, le nombre de paires d'involutions sur  $[n]$  de même forme et ayant  $k$  points fixes.

§10. Polynômes orthogonaux de Sheffer.

Définition 22. Une suite de polynôme  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  est dite suite de polynômes de Sheffer ssi la série génératrice (exponentielle) de ces polynômes a la forme

$$(77) \quad \sum_{n \geq 0} P_n(x) \frac{t^n}{n!} = f(t) \exp(x g(t)).$$

Dans le langage de nos amis québécois, ceci signifie que ces polynômes comptabilisent les "assemblées" d'objets combinatoires de deux "espèces" différentes. Une espèce a pour série génératrice  $f(t)$ , l'autre  $g(t)$ . Le "nombre" d'objets de taille  $n$  ayant une composante de la première espèce et  $k$  composantes de la deuxième est le coefficient de  $x^k$  dans  $P_n(x)$ .

Si  $f(t)=1$ , c'est-à-dire s'il n'y a qu'une seule espèce à comptabiliser, les polynômes  $P_n(x)$  sont dits de type binomiaux.

Pour plus de détails, le lecteur se référera à l'article de synthèse de Rota [33].

Dans le cas  $K=\mathbb{R}$ , appelons polynômes orthogonaux défini-positifs, des polynômes dont les coefficients de la récurrence linéaire satisfont

$$(78) \quad \lambda_k > 0 \text{ pour tout } k \geq 1.$$

Meixner a prouvé que des polynômes orthogonaux défini-positifs sont de Sheffer ssi les coefficients de la récurrence linéaire ont la forme



$$(79) \quad b_k = ck+d, \quad \lambda_k = ak^2+bk,$$

dans laquelle les nombres réels  $a, b, c, d$  satisfont

$$(80) \quad a \geq 0, \quad a+b > 0.$$

Meixner a montré qu'il n'existe que cinq classes de polynômes orthogonaux défini-positifs déterminés par (79) et (80). A un changement de variable près  $Q_n(x) = P_n(gx)$ , ces polynômes sont les polynômes décrits dans ce paragraphe: Laguerre, Hermite, Charlier, Meixner I et Meixner II.

En fait on peut s'affranchir de l'hypothèse  $K=R$  et de positivité. Cela revient à dire que les polynômes orthogonaux de Scheffer correspondent à des histoires avec valuations  $a_k, b'_k, b''_k, c_k$  linéaires en  $k$  de la forme suivante

$$(81) \quad a_k = (k+\alpha) \text{ ou } a_k = a\alpha, \quad b'_k = b'_k, \quad b''_k = b''(k+\beta), \quad c_k = ck, \text{ avec } a\alpha \neq 0.$$

Le changement de variables  $x \rightarrow gx$  dans les polynômes correspond à multiplier  $b_k$  et  $\lambda_k = a_{k-1}c_k$  par une constante. On peut donc toujours supposer  $\alpha = \beta$  ou  $\beta = 0$ . Ainsi le moment des polynômes associés est

$$(82) \quad \mu_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{s(\sigma)} a^{c(\sigma)} b^{dm(\sigma)} b''^{dd(\sigma)} e^{p(\sigma)},$$

dans lequel lequel les paramètres  $s, c, dm$  et  $dd$  ont la même signification que précédemment et  $p(\sigma)$  désigne le nombre de pics de  $\sigma$ .

On peut alors montrer, que du point de vue des moments, on peut se ramener aux cinq distributions données dans les paragraphes précédents.

Le lecteur trouvera au chapitre III l'interprétation des fonctions génératrices  $f(t)$  et  $g(t)$ , ou plutôt celles des opérateurs (au sens de Rota)  $S$  et  $Q$ .

Nous résumons les interprétations des moments des cinq classes de polynômes par des histoires de Laguerre pondérées dans la table suivante

Polynômes	$a_k$	$b'_k$	$b''_k$	$c_k$	moments $\mu_n$
Laguerre $\alpha = 1$ (hist. larges)	$k + 1$	$k + 1$	$k + 1$	$k + 1$	$(n+1)!$
Laguerre $\alpha = 0$ (hist. rest.)	$k + 1$	$k$	$k + 1$	$k$	$n!$
Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$	$k+(\alpha+1)$	$k$	$k+(\alpha+1)$	$k$	$(\alpha+1)_n$
Hermite $H_n(x)$	$1$	$0$	$0$	$k$	$\mu_{2n} = 1.3 \dots (2n-1)$ $\mu_{2n+1} = 0$
Charlier $C_n^{(a)}(x)$	$a$	$k$	$a$	$k$	$\sum_{k=1} S(n, k) a^k$
Meixner I $\hat{m}_n(x; \beta, c)$	$\frac{c(k+\beta)}{1-c}$	$\frac{k}{1-c}$	$\frac{c(k+\beta)}{1-c}$	$\frac{k}{1-c}$	$(1-c)^\beta \sum_{k \geq 0} k^n c^k \frac{(\beta)_k}{k!}$
Meixner II $M_n(x; \delta, \eta)$	$(1+\delta^2)(k+\eta)$	$\delta k$	$(k+\eta)$	$\delta k$	$\delta^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \eta^{s(\sigma)} \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)^{c(\sigma)}$
Sheffer	$\frac{a(k+\beta)}{\text{ou } a\beta}$	$b'k$	$b''(k+\beta)$	$ck$	$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \beta^{s(\sigma)} \frac{a^{c(\sigma)} b^{d(\sigma)} d^{dm(\sigma)}}{b^{d(\sigma)} c^{p(\sigma)}}$

Table 1. Valuations des histoires et moments des polynômes orthogonaux de Sheffer.

## Chapitre III.

Polynômes inverses

Soit  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  une suite de polynômes unitaires de  $K[x]$  (rappelons que nous sous-entendons par "suite de polynômes" le fait que le degré de  $P_n(x)$  est  $n$ ). Ces polynômes forment une base du module  $K[x]$  et, pour tout  $n \geq 0$ , on peut exprimer de manière unique le monôme  $x^n$  sous la forme

$$(1) \quad x^n = \sum_{i=0}^n q_{n,i} P_i(x) .$$

La suite de polynômes unitaires  $(q_{n,n}=1)$  définis par la relation

$$(2) \quad Q_n(x) = \sum_{i=0}^n q_{n,i} x^i$$

est appelée suite inverse de la suite  $\{P_n(x)\}_{n \geq 1}$  .

En d'autres termes, cela revient à dire que la matrice des coefficients (triangulaire avec des 1 sur la diagonale) notée par

$$(3) \quad P = (p_{n,i})_{0 \leq i \leq n} \quad \text{avec} \quad P_n(x) = \sum_{i=0}^n p_{n,i} x^i ,$$

est l'inverse de la matrice  $Q = (q_{n,i})_{0 \leq i \leq n}$  .

Dans ce chapitre, nous étudions combinatoirement les suites inverses des polynômes orthogonaux.

51. Polynômes verticaux

Etant données deux suites  $\{b_k\}_{k \geq 0}$  et  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$  d'éléments de l'anneau  $K$ , nous notons

$$(4) \quad \mu_{n,k} = \sum_{\omega \in M_{n,k}} v(\omega),$$

dans lequel  $M_{n,k}$  désigne l'ensemble des chemins de Motzkin de longueur  $n$  allant du niveau 0 au niveau  $k$ , et  $v(\omega)$  est la valuation du chemin  $\omega$  définie au chapitre I. Remarquons que  $\mu_{n,0} = \mu_n$  précédemment introduit.

Les polynômes verticaux  $V_n(x)$  (relatifs aux suites  $\{b_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ ) sont définis par la relation

$$(5) \quad V_n(x) = \sum_{i=0}^n \mu_{n,i} x^i.$$

Le théorème fondamental de ce chapitre est le suivant

Théorème 1. Soient  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  et  $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$  deux suites d'éléments de  $K$ , et soit  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  la suite de polynômes unitaires définis par la récurrence linéaire à trois terme (I.7), (I.8). La suite des polynômes verticaux  $\{V_n(x)\}_{n \geq 0}$  définie par (4) et (5) est la suite inverse de la suite  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ .

En d'autres termes la matrice  $P = (p_{n,i})_{0 \leq i \leq n}$  des coefficients des  $P_n(x)$  est la matrice inverse de la matrice  $(\mu_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ .

Si pour tout  $n \geq 0$  on a  $\lambda_n \neq 0$ , les polynômes  $P_n(x)$  sont orthogonaux, mais nous n'avons pas besoin de cette hypothèse pour démontrer le théorème. Nous montrerons même des exemples particulièrement intéressants avec  $\lambda_n = 0$  pour tout  $n$ .

Avant de donner une preuve bijective du théorème, nous montrons analytiquement que, dans le cas où  $\lambda_n \neq 0$  pour tout  $n \geq 0$ , celui-ci est une conséquence immédiate de la proposition I.17.

Soit  $f: \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}$  la forme linéaire dont les moments sont  $f(x^n) = \mu_n = \mu_{n,0}$ . D'après la proposition citée, on a pour tout  $n, k \geq 0$  la relation

$$(6) \quad f(x^n P_k(x)) = \lambda_1 \dots \lambda_k \mu_{n,k}.$$

Soit  $Q_n(x) = \sum_{i=0}^n q_{n,i} x^i$  les polynômes inverses des  $P_n(x)$ .

Multipliant les deux membres de l'égalité (1) par  $P_k(x)$ , puis appliquant  $f$ , on obtient en utilisant à nouveau la proposition I.17,

$$(7) \quad f(x^n P_k(x)) = \lambda_1 \dots \lambda_k q_{n,k}$$

Comparant (6) et (7), on a bien démontré le théorème dans le cas  $\lambda_n \neq 0$  pour tout  $n \geq 0$ .

§2. Preuve bijective du théorème 1

Avec les notations précédentes, le théorème 1 n'est pas autre chose que l'égalité

$$(8) \quad \sum_{0 \leq i} p_{k,i} u_{i,\ell} = \delta_{k\ell} \quad \text{pour tout } k, \ell \geq 0.$$

Celle-ci est interprétée par

$$(9) \quad \sum_{(\alpha, \omega) \in E_{k,\ell}} v(\alpha) v(\omega) = \delta_{k\ell}$$

dans laquelle  $E_{k,\ell}$  désigne l'ensemble des paires  $(\alpha, \omega)$  avec  $\alpha$  pavage (avec des monominos et dominos) du segment  $[k]$ , et  $\omega$  chemin de Motzkin allant du niveau 0 au niveau  $\ell$  et de longueur  $|\omega| = p(\alpha)$ , le nombre de points isolés de  $\alpha$ .

Comme pour la preuve de la proposition I.17, nous notons  $h(\alpha)$  le plus petit indice de  $[k]$  "occupé" par un monomino ou domino, avec la convention  $h(\alpha) = \infty$  si le pavage est vide. De même soit  $h(\omega)$  le niveau du premier pas de  $\omega$  qui est un pas Est ou Sud-Est. Si  $\omega$  n'a que des pas Nord-Est, on convient  $h(\omega) = \infty$ .

Le seul cas où  $h(\alpha) = h(\omega) = \infty$  se produit si  $k = \ell$  avec  $\alpha$  pavage vide et  $\omega$  chemin de longueur  $k$  allant du niveau 0 au niveau  $k$  en  $k$  pas Nord-Est. Notons  $F_{k,\ell}$  l'ensemble réduit à ce couple (si  $k = \ell$ ) et  $F_{k,\ell} = \emptyset$  si  $k \neq \ell$ .

Nous définissons une involution  $\theta$  sur  $E_{n,k} \setminus F_{n,k}$ , d'une manière très similaire à celle définie pour la proposition I.17, et vérifiant

(10) si  $\theta(\alpha, \omega) = (\alpha', \omega')$ , alors  $v(\alpha')v(\omega') = -v(\alpha)v(\omega)$ .

Les deux cas à distinguer sont

(i)  $h(\alpha) - 1 \leq h(\omega)$

(ii)  $h(\alpha) - 1 > h(\omega)$ .

On définit  $\theta(\alpha, \omega)$  exactement comme au chapitre I, (voir les figures 4 et 5 de ce chapitre), par "transport" d'un domino ou monomino d'un côté à l'autre de  $\alpha$  ou  $\omega$ .

Il est clair que  $\theta(\alpha, \omega)$  est un élément de  $E_{k, \ell} \setminus F_{k, \ell}$  et que  $\theta$  vérifie (10), d'où la relation (9) et le théorème 1.



§3. Exemples: les polynômes orthogonaux de Sheffer

Nous avons introduit au chapitre II les polynômes de Sheffer et mentionné la propriété que les seuls polynômes orthogonaux de Sheffer sont, à changement de variable près, les polynômes d'Hermite, Charlier, Laguerre, et Meixner (1ère et 2ème espèce).

Une propriété des polynômes de Sheffer exprime que la suite  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  est de Sheffer si et seulement si la suite inverse  $\{Q_n(x)\}_{n \geq 0}$  l'est aussi. De plus, si la série génératrice des  $Q_n$  est

$$(11) \quad \sum_{n \geq 0} Q_n(x) \frac{t^n}{n!} = s(t) \exp(x q(t)),$$

alors celle des polynômes inverses est

$$(12) \quad \sum_{n \geq 0} P_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{s(q^{-1}(t))} \exp(x q^{-1}(t)),$$

dans lequel  $u = q^{-1}(t)$  désigne la série réciproque (au sens de l'inversion de Lagrange) de la série  $t = q(u)$ .

Remarque 2. En notant  $D$  l'opérateur de dérivation  $D(x^n) = nx^{n-1}$ , on associe aux séries exponentielles  $s(t)$  et  $q(t)$  les opérateurs

$$(13) \quad S = s(D) \quad \text{et} \quad Q = q(D).$$

Ces opérateurs jouent un rôle fondamental dans la théorie de Rota [33].

Il permettent de donner une autre caractérisation des polynômes de Sheffer. L'opérateur  $S$  a la forme  $S = \sum_{n \geq 0} s_n \frac{D^n}{n!}$  avec  $s_0 \neq 0$  tandis que  $Q$  a la forme  $Q = \sum_{n \geq 1} q_n \frac{D^n}{n!}$  avec  $q_1 \neq 0$ . Les polynômes  $B_n = S(P_n)$  sont des polynômes appelés de type binomiaux associés à l'opérateur  $Q$ , c'est-à-dire les (seuls) polynômes vérifiant

$$(14) \quad B_0(x)=1, \quad B_n(0)=0 \quad \text{pour tout } n > 0 \text{ et } Q(B_n) = B_{n-1}.$$

Pour chacune des familles de polynômes  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  introduites au chapitre II, nous interprétons en termes d'histoires les polynômes inverses, c'est-à-dire les polynômes verticaux  $V_n(x)$ .

Nous reprenons donc les suites  $\{a_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{b'_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{b''_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{c_k\}_{k \geq 1}$  définissant les cinq types d'histoires associées aux cinq familles de polynômes orthogonaux de Sheffer. Comme au chapitre II, nous notons  $v_2$  la valuation des chemins relative aux suites  $b_k = b'_k + b''_k$  et  $\lambda_k = a_{k-1} c_k$ .

Pour interpréter les polynômes verticaux, il sera plus commode de considérer les chemins de Motzkin  $\omega$  allant du niveau  $k$  au niveau  $0$ . Ceci revient à "renverser" le temps dans les histoires (relatives aux chemins allant du niveau  $0$  au niveau  $k$ ) et intervertir le rôle des suites  $\{a_k\}_{k \geq 0}$  et  $\{c_k\}_{k \geq 1}$ .

Soit donc

$$(15) \quad \bar{\mu}_{n,k} = \sum_{\omega} v_2(\omega),$$

où la sommation est étendue aux chemins de Motzkin de longueur  $n$  allant du niveau  $k$  au niveau  $0$ .

D'après le lemme II.1, on a

$$(16) \quad \bar{\mu}_{n,k} = c_1 \dots c_k \mu_{n,k}.$$

Pour les cinq types d'histoires considérées, on a  $c_k = k$ , et donc  $\mu_{n,k} = \frac{1}{k!} \bar{\mu}_{n,k}$ . (sauf pour Meixner I,  $c_k = \frac{k}{1-c}$   $\mu_{n,k} = (1-c)^k \frac{1}{k!} \bar{\mu}_{n,k}$ ).

On peut généraliser la bijection entre histoires de Laguerre restreintes de longueur  $n$  et les permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , aux histoires relatives aux chemins allant d'un niveau quelconque  $k \geq 0$  au niveau  $0$ . Au lieu de commencer la construction de  $\sigma$  avec un seul sommet vacant, on la commence avec  $k + 1$  sommets vacants  $s_0, s_1, \dots, s_k$ . Chacun de ces sommets  $s_j$  donnera naissance à un arbre binaire croissant  $\beta_j$ .

On convient que les sommets vacants sont numérotés de "gauche à droite" dans chaque arbre binaire, comme pour le cas  $k = 0$ , et selon l'ordre croissant  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ . Le choix  $p_x = 1$  sera ainsi le sommet vacant formant le dernier sommet de la branche gauche de  $\beta_0$ . A la fin de la construction, seul ce sommet est vacant. On obtient ainsi  $k$  arbres binaires croissants (sans sommets vacants)  $\beta_1, \dots, \beta_k$  et un arbre binaire croissant  $\beta_0$  ayant un seul sommet vacant: le dernier sommet de la branche gauche. Les sommets étiquetés

des arbres  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$  sont les entiers (distincts)  $1, 2, \dots, n$ .

Pour chacun des cinq types d'histoires du chapitre II, correspondant à des restrictions d'histoires de Laguerre pondérées, on peut ainsi construire des arbres binaires croissants  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ . Ces arbres sont de deux types.

L'arbre  $\beta_0$  a le type provenant de l'histoire "restreinte" comme au chapitre II. Les arbres  $\beta_1, \dots, \beta_k$  ont le type provenant de l'histoire de Laguerre "large" pondérée, c'est-à-dire l'histoire pour laquelle il n'y a plus la restriction pour les pas Sud-Est (pic) et Est bleu (double montée) d'avoir un choix  $p_x \neq 1$ . De plus la pondération  $p_x = \beta$ , lorsque  $p_x$  est le premier choix possible pour les pas Nord-Est (creux) et Est rouge (double descente), comptabilise le nombre d'éléments de la branche gauche de  $\beta_0$ , et non les branches gauches des arbres  $\beta_1, \dots, \beta_k$ .

Les deux types d'histoires sont définies par les valuations données par les tables 1 et 2.

Ainsi le coefficient  $\frac{1}{k!} \bar{u}_{n,k}$  du polynôme vertical  $V_n(x)$  dénombre le nombre d'assemblées d'arbres  $(\beta_0, \{\beta_1, \dots, \beta_k\})$  dans laquelle  $\beta_0$  correspond à l'histoire "restreinte" et  $\beta_1, \dots, \beta_k$  correspondent à l'histoire "large". Les polynômes  $V_n(x)$  sont bien de Sheffer ayant une série génératrice de la forme (11), dans laquelle  $s(t)$  (resp.  $q(t)$ ) désigne la série génératrice exponentielle des histoires du type "restreint" de la table 1 (resp. type "large" de la table 2).

	$a_k$	$c_k$	$b'_k$	$b''_k$
Laguerre	$k+\beta$	$k$	$k$	$k+\beta$
Hermite	1	$k$	0	0
Charlier	$a$	$k$	$k$	$a$
Meixner I	$c(k+\beta)$	$k$	$k$	$c(k+\beta)$
Meixner II	$(1+\delta^2)(k+\eta)$	$k$	$\delta k$	$\delta(k+\eta)$

Table 1. Valuations "restreintes" (arbre  $\beta_0$ )

	$a_k$	$c_k$	$b'_k$	$b''_k$
Laguerre	$k+1$	$k+1$	$k+1$	$k+1$
Hermite	0	$k+1$	0	0
Charlier	0	$k+1$	$k+1$	$a$
Meixner I	$c(k+1)$	$k+1$	$k+1$	$c(k+1)$
Meixner II	$(1+\delta^2)(k+1)$	$k+1$	$\delta(k+1)$	$\delta(k+\eta)$

Table 2. Valuations "larges" (arbres  $\beta_1, \dots, \beta_k$ )

Remarquons que  $s(t)$  est la série génératrice exponentielle des moments correspondant  $\mu_n$ . Ces moments, obtenus bijectivement au chapitre II, sont rappelés dans la table 3. En passant aux histoires "larges", on obtient de manière analogue le coefficient correspondant  $q_n$  de  $\frac{t^n}{n!}$  dans  $q(t)$ . Ces coefficients sont également rassemblés dans la table 3, et les séries génératrices correspondantes dans la table 4.

	$\mu_n \quad (n \geq 0)$	$q_n \quad (n \geq 1)$
Laguerre	$(\beta_n)$	$n!$
Hermite	$\begin{cases} \mu_{2n} = 1.3 \dots (2n-1) \\ \mu_{2n+1} = 0 \end{cases}$	$\delta_{1,n}$
Charlier	$\sum_{k=1}^n S(n,k) a^k$	1
Meixner I	$\frac{1}{(1-c)^n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \beta^{s(\sigma)} c^{1+d(\sigma)}$	$\frac{1}{(1-c)^n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} c^{d(\sigma)}$
Meixner II	$\delta^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} n^{s(\sigma)} (1 + \frac{1}{\delta^2})^{c(\sigma)}$	$\delta^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (1 + \frac{1}{\delta^2})^{\bar{c}(\sigma)}$

Table 3 - "Nombres" d'arbres binaires de taille  $n$  du type  $\beta_0$  (histoires restreintes) et du type  $\beta_1, \dots, \beta_k$  (histoires larges).

Rappelons que pour les histoires restreintes, le paramètre  $c(\sigma)$  désigne le nombre de creux de la permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  avec la convention  $\sigma(0) = n+1$ , tandis que pour les histoires larges le paramètre  $\bar{c}(\sigma)$  désigne le nombre de creux avec la convention  $\sigma(0) = 0$ .

On déduit immédiatement de la série génératrice II.64 des polynômes eulériens  $A_n(c) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} c^{1+d(\sigma)}$  et  $\bar{A}_n(c) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} c^{d(\sigma)}$  les relations

$$(17) \quad \sum_{n \geq 0} \frac{A_n(c)}{(1-c)^n} \frac{t^n}{n!} = \frac{1-c}{1-ce^t} ,$$

$$(17') \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\bar{A}_n(c)}{(1-c)^n} \frac{t^n}{n!} = \frac{e^t - 1}{1-ce^t} .$$

Remarquons que dans le cas Meixner I, le coefficient de  $\frac{t^n}{n!}$  dans la série  $q(t)$  (table 4) est en fait  $(1-c)q_n$  avec  $q_n$  donné dans la table 3. Ceci est dû au fait que l'on a pas ici exactement comme pour les autres cas  $c_k = k$ . La relation (16) implique ici  $\mu_{n,k} = \frac{(1-c)^k}{k!} \bar{\mu}_{n,k}$  et donc chacun des arbres  $\beta_1, \dots, \beta_k$  doit être pondéré par  $(1-c)$ .

Les formules donnant  $s(t)$  pour Meixner I, ainsi que celles donnant  $s(t)$  et  $q(t)$  pour Meixner II sont laissées en exercices au lecteur.

$p_n(x)$	$s(t)$	$q(t)$	$\sum_{n \geq 0} p_n(x) \frac{t^n}{n!}$
Laguerre	$(1-t)^{-\alpha-1}$	$\frac{t}{1-t}$	$(1+t)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{xt}{1+t}\right)$
Hermite	$\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$	$t$	$\exp\left(tx - \frac{t^2}{2}\right)$
Charlier	$\exp(a(e^t-1))$	$e^t-1$	$\exp(-at)(1+t)^x$
Meixner I (unitaire)	$\left(\frac{1-c}{1-ce^t}\right)^\beta$	$(1-c)\left(\frac{e^t-1}{1-ce^t}\right)$	$\left(1 + \frac{tc}{1-c}\right)^{-\beta} \left(\frac{1-c+t}{1-c+ct}\right)^x$
Meixner II	$[\cos t(1-\delta t \operatorname{tg} t)]^{-\eta}$	$\frac{\operatorname{tg} t}{1-\delta t \operatorname{tg} t}$	$[(1+\delta t)^2 + t^2]^{-\eta/2} \exp[\operatorname{zarctg}\left(\frac{t}{1+i}\right)]$

Table 4. Séries génératrices des opérateurs S et Q associés aux polynômes orthogonaux de Sheffer.

En utilisant la relation (12), on déduit aisément les séries génératrices des polynômes correspondant (dernière colonne de la table 4).



§4 - Autres exemples -

Exemple 3 - Si l'on pose  $b_k = 1$  et  $\lambda_k = 0$  pour tout  $k \geq 0$ , il vient évidemment

$$(18) \quad \mu_{n,k} = \binom{n}{k}, \quad p_{n,k} = (-1)^{n-k} \binom{n}{k},$$

et le théorème 1 est la classique propriété d'inversion de la matrice des coefficients binomiaux.

Remarquons qu'en posant  $b_k = q^k$  et  $\lambda_k = 0$ , il est aisé de vérifier que  $\mu_{n,k} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ , le q-analogue du coefficient binomial  $\binom{n}{k}$  et que  $p_{n,k} = (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ .

Exemple 4 - Pour  $b_k = k + 1$  et  $\lambda_k = 0$ , il est aisé de démontrer bijectivement que  $\mu_{n,k} = S(n, k+1)$ . Il suffit de faire une construction analogue à celle faite avec les histoires de Charlier, mais en laissant tous les blocs "ouverts".

De même il est classique de construire une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$  associée à une "histoire de Favard" de longueur  $n$  (pour les valuations ci-dessus). Le  $i^{\text{ème}}$  pas Nord-Est correspond à créer un "nouveau" cycle avec l'élément  $i + 1$ , tandis que le  $i^{\text{ème}}$  pas Nord avec un choix  $1 \leq p_i \leq i$  correspond à insérer  $(i + 1)$  dans l'un des cycles déjà construits. Ainsi  $(-1)^{n-k} p_{n,k}$  est le nombre de permutations de  $\mathfrak{S}_{n+1}$  ayant  $k + 1$  cycles. On a donc  $p_{n,k} = s(n+1, k+1)$  le nombre de Stirling de 1ère espèce.

On retrouve bien la dualité entre les nombres de Stirling  $S(n, k)$  et  $s(n, k)$ .

Exemple 5. Les deux exemples précédents sont en fait un cas particulier de la valuation  $b_k = x_k$ ,  $\lambda_k = 0$ . Il est alors aisé de voir que  $\mu_{n,k}$  est la fonction symétrique homogène  $h_{n-k}(x_0, x_1, \dots, x_k)$  tandis que  $p_{n,k}$  est la fonction symétrique élémentaire  $a_{n-k}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ .

§5. Généralisation: chemins de Lukasiewicz

La preuve bijective du théorème 1 se généralise aux suites arbitraires  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  de polynômes.

Définir une suite  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  de polynômes unitaires revient à définir une matrice de coefficients  $\Lambda = (\lambda_{k,\ell})_{0 \leq \ell \leq k}$  telle que pour tout  $k \geq 0$  on ait

$$(19) \quad P_{k+1}(x) = xP_k(x) - \sum_{i=0}^k \lambda_{k,k-i} P_{k-i}(x).$$

Comme pour les polynômes orthogonaux, nous interprétons cette récurrence par des pavages valués du segment  $[0, n-1]$ .

Un pavage  $\alpha$  de  $[0, n-1]$  est maintenant la donnée de segments  $[\ell, k] \subset [0, n-1]$  deux à deux disjoints. Pour  $0 \leq \ell \leq k < n$ , la valuation du segment  $[\ell, k]$  est  $\lambda_{k,\ell}$ . La valuation du pavage  $\alpha$  est le produit des valuations de ses segments. Le nombre de points isolés, c'est-à-dire les points de  $[0, n-1]$  n'appartenant à aucun segment, est noté  $p(\alpha)$ .

Il est alors clair que la suite de polynômes  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  définie par la récurrence (19) avec condition initiale  $P_0 = 1$ , peut aussi être définie par la relation

$$(20) \quad P_n(x) = \sum_{\alpha} v(\alpha) x^{p(\alpha)},$$

où la sommation est étendue à tous les pavages (de segments) de  $[0, n-1]$ .

Maintenant, nous généralisons les chemins de Motzkin par les chemins suivants.

Définition 6. Un chemin  $\omega = (s_0, s_1, \dots, s_n)$  du plan  $\mathbb{I} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  est appelé chemin de Lukasiewicz s'il vérifie les trois conditions suivantes

- (i) pour tout  $i \geq 0$ , le niveau  $y_i$  de  $s_i = (x_i, y_i)$  est  $\geq 0$ ,
- (ii)  $s_0 = (0, 0)$ ,
- (iii) pour tout  $i$ ,  $0 \leq i < n$ ,  $y_{i+1} \leq 1 + y_i$ .

En somme les pas élémentaires autorisés du chemin sont Nord-Est, Est, ou la chute du niveau  $k \geq 1$  à un niveau quelconque  $\ell$  avec  $0 \leq \ell < k$ .

Les pas Nord-Est sont valués 1, tandis que les pas allant du niveau  $k$  au niveau  $\ell \leq k$  sont valués  $\lambda_{k, \ell}$ . La valuation d'un chemin de Lukasiewicz  $\omega$  est encore notée  $v(\omega)$ .

Comme pour les chemins de Motzkin, on peut définir pour  $0 \leq k \leq n$  les quantités

$$(21) \quad \mu_{n, k} = \sum_{\omega} v(\omega) \quad ,$$

où la sommation est étendue à tous les chemins de Lukasiewicz de longueur  $n$  allant du niveau 0 au niveau  $k$ .

On peut alors énoncer

Proposition 7 - Soient  $\Lambda = (\lambda_{k,\ell})_{0 \leq \ell \leq k}$  une matrice triangulaire d'éléments de  $\mathbb{K}$ ,  $V = (\mu_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$  la matrice définie par (21) et  $P = (p_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$  la matrice des coefficients des polynômes  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n p_{n,k} x^k$  définis par la récurrence (19) avec  $P_0(x) = 1$ . Alors les matrices (triangulaires avec des 1 sur la diagonale)  $V$  et  $P$  sont inverses l'une de l'autre.

La preuve bijective est tout à fait analogue à celle du théorème 1. Il s'agit ici de "transporter" un segment  $[\ell, k]$  vers un chemin de Lukasiewicz  $\omega$  (ou vice-versa). Le morceau de chemin inséré (ou enlevé) de  $\omega$  est un chemin  $\xi = u_1, \dots, u_{k-\ell} v$  allant du niveau  $\ell$  au niveau  $k$ , produit de  $k-\ell$  pas élémentaires Nord-Est et d'une chute  $v$  allant du niveau  $k$  au niveau  $\ell \leq k$ .

Remarquons que pour toute matrice triangulaire  $M$  avec coefficients 1 sur la diagonale, il existe une seule matrice  $\Lambda = (\lambda_{k,\ell})_{0 \leq \ell \leq k}$  telle que  $M$  soit la  $V$  matrice (resp.  $P$  matrice) associée. Remarquons aussi que  $\Lambda$  peut être n'importe quelle matrice triangulaire.

Exemple 8. Prenons les coefficients  $\lambda_{k,\ell} = 1$  pour tous entier  $0 \leq \ell \leq k$ . Les nombres  $\mu_{n,k}$  sont parfois appelés nombres de Delannoy. Les premières valeurs sont données dans la table 5.

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	2	2	1			
3	5	5	3	1		
4	14	14	9	4	1	
5	42	42	28	14	5	1

Remarquons que chaque nombre  $\mu_{n,k}$  est la somme de  $\mu_{n,k+1}$  (situé à l'Est) et de  $\mu_{n-1,k-1}$  (situé au Nord-Ouest), avec la convention  $\mu_{n,k} = 0$  pour  $k \notin [0,n]$ .

Le nombre  $\mu_{n,0}$  (nombre de chemins de Lukasiewicz de longueur  $n$  revenant au niveau 0) est le nombre de Catalan  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ . Le nombre total de chemins de Lukasiewicz de longueur  $n$  est  $\sum_{k=0}^n \mu_{n,k} = \mu_{n+1,0} = C_{n+1}$ .

Ainsi la matrice inverse du triangle  $D_n = (\mu_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$  des nombres de Delannoy est la matrice  $P_n = (p_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$  dans lequel  $p_{n,k}$  est la différence  $a_{n,k} - b_{n,k}$ , en désignant par  $a_{n,k}$  (resp.  $b_{n,k}$ ) le nombre de pavages de  $[0, n-1]$  ayant  $k$  points isolés et un nombre pair (resp. impair) de segments.

Maintenant nous définissons une involution  $\phi$  sur ces pavages  $\alpha$ . Il y a trois cas possibles.

- (i)  $\alpha$  n'a que des monominos et ceux-ci ne sont jamais consécutifs.
- (ii)  $\alpha$  admet un segment  $[k, \ell]$  de longueur  $\geq 2$  et à gauche de ce segment, on ne rencontre que des monominos  $\{k_1, \dots, k_r\}$ , ( $r \geq 0$ ) non consécutifs, c'est-à-dire  $k_{i+1} - k_i \geq 2$  et  $k - k_r \geq 2$ .
- (iii)  $\alpha$  admet un segment  $[k, \ell]$  tel que  $(k-1)$  soit un mononimo et tel que les segments éventuels à gauche de  $k-1$  ne soient que des monominos  $\{k_1, \dots, k_s\}$  non consécutifs c'est-à-dire  $k_{i+1} - k_i \geq 2$  et  $k_s - (k-1) \geq 2$ .

Dans le cas (i), on définit  $\Theta(\alpha) = \alpha$ . Dans le cas (ii) (resp. (iii))  $\Theta(\alpha)$  est obtenu à partir de  $\alpha$  en remplaçant le segment  $[k, \ell]$  (resp. les segments  $[k-1, k-1]$  et  $[k, \ell]$ ) par les segments  $[k, k]$  et  $[k+1, \ell]$  (resp. les segments  $[k-1, \ell]$ ).

Il est aisé de vérifier que  $\Theta$  est une involution. Ainsi  $a_{n,k} - b_{n,k} = (-1)^{n-k} c_{n,k}$  dans lequel  $c_{n,k}$  désigne le nombre de pavages de  $[0, n-1]$  du type (i) ayant  $n-k$  monominos. Il est clair que  $c_{n,k} = \binom{k+1}{n-k}$ .

Corollaire 9. La matrice inverse de la matrice des nombres de Delannoy est la  
matrice  $P = (p_{n,k})$  avec  $p_{n,k} = (-1)^{n-k} \binom{k+1}{n-k}$ .

Chapitre IV - Déterminants de moments -

Le problème central de ce chapitre est l'existence et la détermination des suites  $\{b_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$  satisfaisant I-(15), lorsque la suite des moments  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$  est donnée. Ce problème est équivalent à l'existence et la détermination des suites de polynômes orthogonaux pour une suite donnée de moments.

Au §1, nous montrons que la méthodologie des chemins de Motzkin valués permet un calcul simple et rapide des coefficients  $b_k$  et  $\lambda_k$ . L'unicité et une caractérisation d'existence en découlent.

L'expression théorique des coefficients  $b_k$  et  $\lambda_k$  en fonction des moments fait intervenir des déterminants de Hankel de moments. Nous interprétons au §3 ces déterminants par des configurations de chemins de Motzkin deux à deux disjoints. Cette interprétation est une conséquence d'un théorème général de Gessel et Viennot que nous rappelons au §2. Ces configurations de chemins permettent de mettre en évidence au §4 une certaine dualité entre les chemins de Motzkin et les chemins de Favard.

Enfin, au §5, nous démontrons avec la "géométrie" des chemins une relation de dualité reliant certains déterminants de Hankel d'une série  $f(t)$  et ceux de la série inverse  $\frac{1}{f(t)}$ . Cette relation est importante dans la théorie des approximants de Padé.

Dans tout ce chapitre on suppose que  $\mathbb{K}$  est un corps (commutatif). On suppose aussi, comme dans tout ce mémoire, que les suites de moments  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$  sont telles que  $\mu_0 = 1$ .



§1 - Calcul des coefficients  $b_k$  et  $\lambda_k$ .

On cherche des suites  $\{b_k\}_{k \geq 0}$  et  $\{\lambda_k\}_{k \geq 0}$  satisfaisant la condition I-(15), la suite  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$  étant donnée.

Le calcul se fait par récurrence.

On a évidemment  $b_0 = \mu_1$ .

Pour  $n \geq 1$ , supposons connus  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ , tels que  $\lambda_1 \dots \lambda_{n-1} \neq 0$  et satisfaisant

$$(1) \quad \sum_{|\omega|=m} v(\omega) = \mu_m, \text{ pour } m = 0, 1, \dots, 2n-1.$$

Dans la sommation (1), les chemins de Motzkin  $\omega$  de longueur  $\leq 2n-1$  atteignent au plus le niveau  $n-1$  et la valuation  $v(\omega)$  ne fait intervenir que les coefficients  $b_i$  et  $\lambda_i$  pour  $i \leq n-1$ .

Parmi les chemins de Motzkin de longueur  $2n$ , un seul dépasse strictement le niveau  $n-1$ , c'est le chemin ayant  $n$  pas Nord-Est, suivi de  $n$  pas Sud-Est, et devant avoir la valuation  $(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ .

Ainsi le coefficient  $\lambda_n$  vérifie la relation

$$(2) \quad (\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}) \lambda_n + \sum_{\omega} v(\omega) = \mu_{2n},$$

dans lequel la sommation est parmi les chemins de Motzkin de longueur  $2n$  et bornés au niveau  $n-1$ .

Cette dernière somme est fonction uniquement de  $b_0, \dots, b_{n-1}$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ . La non-nullité de  $\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}$  détermine  $\lambda_n$  de façon unique et la relation (1) est à nouveau vérifiée pour  $0 \leq m \leq 2n$ . Remarquons que  $\lambda_n$  peut être nul.

Maintenant, pour  $n \geq 1$ , supposons connus  $b_0, \dots, b_{n-1}$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  avec  $\lambda_1 \dots \lambda_n \neq 0$ . Parmi les chemins de Motzkin de longueur  $2n+1$ , un seul utilise des pas élémentaires ayant une valuation autre que celles connues. C'est le chemin ayant  $n$  pas Nord-Est, puis un pas Est, suivi de  $n$  pas Sud-Est. Sa valuation est  $\lambda_1 \dots \lambda_n b_n$ .

Ainsi  $b_n$  vérifie la relation

$$(3) \quad (\lambda_1 \dots \lambda_n) b_n + \sum_{\omega} v(\omega) = \mu_{2n+1},$$

dans lequel la sommation est parmi les chemins de Motzkin de longueur  $2n+1$  (et donc bornés au niveau  $n$ ) et n'ayant pas de pas Est au niveau  $n$ .

L'équation (3) détermine  $b_n$  de manière unique si  $\lambda_1 \dots \lambda_n \neq 0$ . La relation (1) est à nouveau vérifiée pour  $0 \leq m \leq 2n+1$ .

De proche en proche, on calcule ainsi les coefficients  $b_n$  et  $\lambda_n$ ,  $n \geq 1$  tant que  $\lambda_1 \dots \lambda_n \neq 0$ . Si il existe un entier  $p$  avec  $\lambda_p = 0$  (que nous supposons le plus petit possible), alors la relation I-(15) détermine tous les moments  $\mu_n$  pour  $n > 2p$  en fonction des coefficients  $b_0, \dots, b_{p-1}$ ;  $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ , c'est-à-dire des moments  $\mu_n$  avec  $n < 2p$ .

En pratique, il n'est pas nécessaire de recalculer à chaque fois les sommations intervenant dans les relations (2) et (3).

Pour  $m \geq 0$ , soit  $D_m$  la droite d'équation  $y = -x + m$ . Pour tout  $n \geq 0$  et  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , notons  $h'_{2n,k}$  (resp.  $h'_{2n+1,k}$ ) la somme des valuations  $v(\omega)$  des chemins de Motzkin bornés au niveau  $n-1$  (resp. bornés au niveau  $n$  sans pas Est à ce niveau), partant du point  $(0,0)$  et se terminant au point de la droite  $D_{2n}$  (resp.  $D_{2n+1}$ ) situé au niveau  $k$ .

De même notons  $h_{2n,k}$  (resp.  $h_{2n+1,k}$ ) les sommes analogues pour tous les chemins de Motzkin (sans restriction) ayant même points de départ et d'arrivée que ceux pour  $h'_{2n,k}$  (resp.  $h'_{2n+1,k}$ ) (voir figures 1 et 2).

Remarquons que  $h_{m,k} = \mu_{m-k,k}$  dans les notations du chapitre III. Le calcul de ces quantités se fait par la suite de relations suivantes

Calcul de  $\lambda_n$ .

$$(4) \quad \begin{cases} h'_{2n,n-1} &= b_{n-1} h'_{2n-1,n-1} + h'_{2n-2,n-2} , \\ \hline h'_{2n,k} &= \lambda_{k+1} h'_{2n,k+1} + b_k h'_{2n-1,k} + h'_{2n-2,k-1} , \text{ pour } k = n-2, \dots, 1, \\ \hline h'_{2n,0} &= \lambda_1 h'_{2n,1} + b_0 \mu_{2n-1} , \\ \mu_{2n} &= h'_{2n,0} + (\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}) \lambda_n . \end{cases}$$

(5)  $h_{2n,k} = h'_{2n,k} + (\lambda_{k+1} \dots \lambda_n)$  pour  $1 \leq k \leq n-1$ .

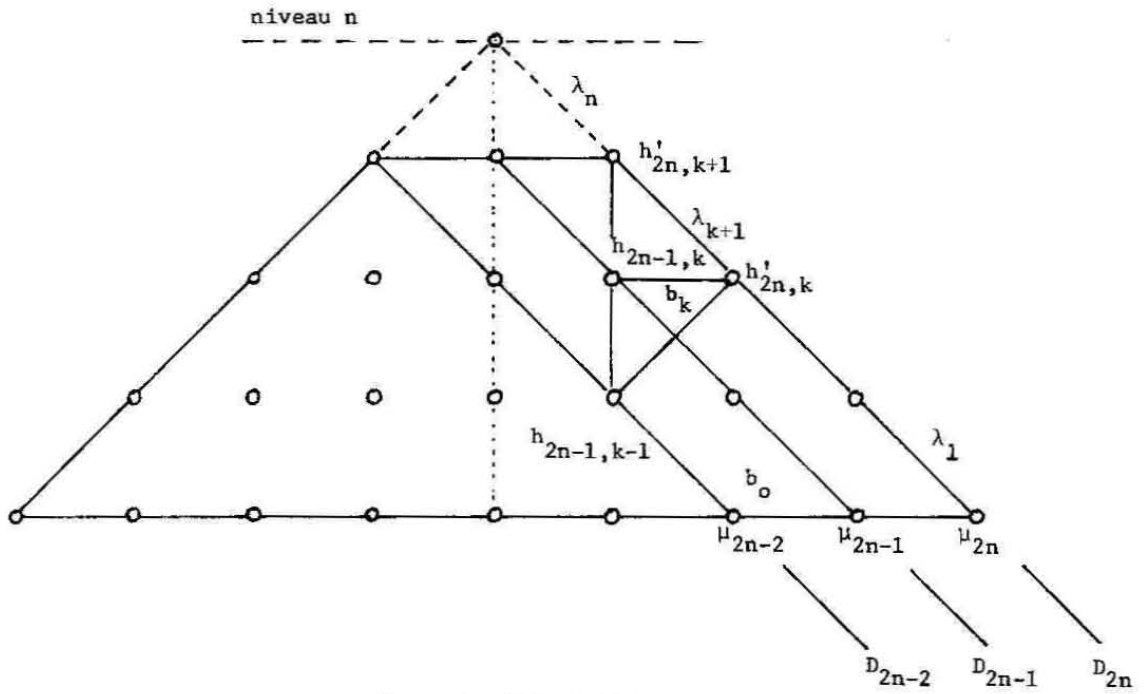


Figure 1 Calcul de  $\lambda_n$ .

Calcul de  $b_n$ .

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \left\{ \begin{aligned} h'_{2n+1,n} &= h_{2n-1,n-1} , \\ \hline h'_{2n+1,k} &= \lambda_{k+1} h'_{2n+1,k+1} + b_k h_{2n,k} + h_{2n-1,k-1} , \text{ pour } k=n-1, \dots, 1 , \\ \hline h'_{2n+1,0} &= \lambda_1 h'_{2n+1,1} + b_0 \mu_{2n} , \\ \mu_{2n+1} &= h'_{2n+1,0} + (\lambda_1 \dots \lambda_n) b_n . \end{aligned} \right. \\
 (7) \quad & \left\{ \begin{aligned} h_{2n+1,k} &= h'_{2n+1,k} + (\lambda_{k+1} \dots \lambda_n) b_n \text{ pour } 1 \leq k \leq n-1 , \\ h_{2n+1,n} &= h'_{2n+1,n} + b_n . \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

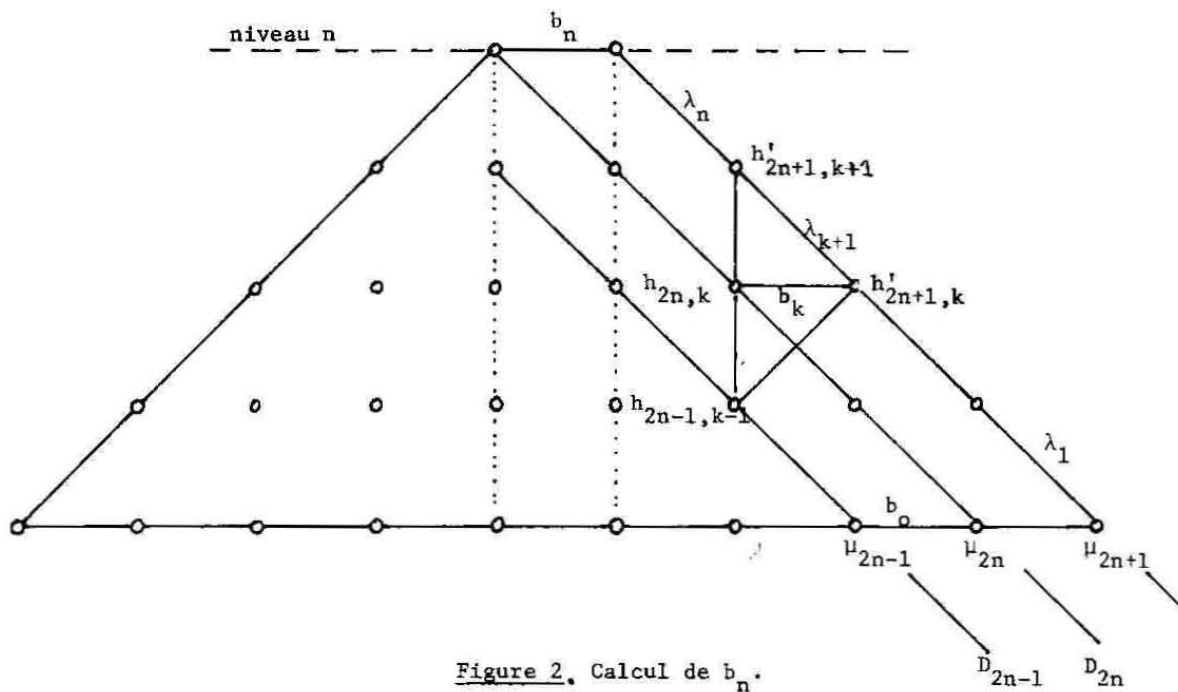


Figure 2. Calcul de  $b_n$ .

Le système (4) calcule  $\lambda_n$ , connaissant  $b_i, h_{2n-1,i}, h_{2n-2,i}$  pour  $0 \leq i \leq n-1$  et  $\lambda_i$  pour  $1 \leq i \leq n-1$ . Ensuite le système (5) calcule  $h_{2n,i}$  pour  $0 \leq i \leq n$ .

Le système (6) calcule  $b_n$ , connaissant  $b_i, h_{2n,i}, h_{2n-1,i}$  pour  $0 \leq i \leq n-1$ . Ensuite le système (7) calcule  $h_{2n+1,i}$  pour  $0 \leq i \leq n$ . L'algorithme gardera en mémoire les  $b_i, \lambda_i$ , le produit  $(\lambda_1 \dots \lambda_n)$  et les nombres  $h_{m,i}, h_{m-1,i}, 0 \leq i$ , pour effectuer la  $(m+1)^{\text{ième}}$  étape.

Le calcul des systèmes (4), (5), (6), (7) s'effectue en  $6n-3$  additions, 2 soustractions,  $6n-4$  multiplications et 2 divisions. Les divisions peuvent rendre l'algorithme instable, mais l'avantage de l'algorithme présenté est de réduire au minimum ces divisions. Par exemple un autre algorithme, connu classiquement sous le nom de quotient-différence, effectue un nombre de division de l'ordre de  $n^2$  pour calculer la suite  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

En conclusion de ce paragraphe, nous pouvons énoncer

Proposition 1. Soit  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$  une suite d'éléments du corps  $\mathbb{K}$ . Il existe au plus une paire  $\{b_n\}_{n \geq 0}, \{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  tel que  $\mu_n$  soit la somme des valuations associées  $v(w)$  des chemins de Motzkin de longueur  $n$ . Cette paire de suites existe ssi les coefficients  $\lambda_n$  apparaissant dans la récurrence (2), (3) (équivalente à (4), (5), (6), (7)) sont non nuls pour tout  $n \geq 1$ .

§2 - Déterminants et chemins -

Dans ce paragraphe, qui est indépendant des chapitres précédents, la notation  $v$  désigne une valuation quelconque  $v: \Pi \times \Pi \rightarrow \mathbb{K}$  (rappelons  $\Pi = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ).

Soient  $A_1, \dots, A_n$  (resp.  $B_1, \dots, B_n$ ) des points distincts du plan  $\Pi$ . (Notons que certains  $A_i$  peuvent être égaux à certains  $B_j$ ). Notons  $\Omega_{ij}$  l'ensemble des chemins (de longueur quelconque)  $\omega = (s_0, \dots, s_m)$  allant de  $s_0 = A_i$  à  $s_m = B_j$  et ayant une valuation non nulle  $v(\omega) = v(s_0, s_1) \dots v(s_{m-1}, s_m)$ . Nous supposons l'hypothèse de finitude

$$(8) \quad \Omega_{ij} \text{ est fini pour tout } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq n.$$

Ceci implique que les chemins de  $\Omega_{ij}$  ne repassent jamais deux fois par le même sommet.

Nous pouvons donc définir les éléments de l'anneau  $K$  par

$$(9) \quad a_{ij} = \sum_{\omega \in \Omega_{ij}} v(\omega).$$

Pour  $\sigma$  permutation de  $\mathfrak{S}_n$ , notons  $\text{Inv}(\sigma)$  le nombre d'inversions de  $\sigma$ , c'est-à-dire

$$(10) \quad \text{Inv}(\sigma) = |\{(i, j) \text{ avec } 1 \leq i < j \leq n \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\}|.$$

Nous interprétons le  $n \times n$  déterminant des  $a_{ij}$  par la

Proposition 2 - Soient  $v: \Pi \times \Pi \rightarrow \mathbb{K}$  une valuation,  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$  et  $\{B_i\}_{1 \leq i \leq n}$

deux n-uples de points distincts de  $\mathbb{P}$  vérifiant (8). Le déterminant des  $a_{ij}$  défini par (9) est égal à

$$(11) \quad \det(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \sum_{(\sigma; \omega_1, \dots, \omega_n)} (-1)^{\text{Inv}(\sigma)} v(\omega_1) \dots v(\omega_n),$$

où la sommation est étendue aux paires formées par une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , et une configuration  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  de  $n$  chemins deux à deux disjoints (pas de sommets communs), et telle que pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $\omega_i$  va de  $A_i$  à  $B_{\sigma(i)}$ .

La relation suivante, appelée condition des croisements, simplifie beaucoup la relation (11) et est particulièrement importante pour les exemples.

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(hypothèse des croisements) pour tous entiers } 1 \leq i < k \leq n, 1 \leq j < \ell \leq n, \\ \text{si } \omega \in \Omega_{i\ell} \text{ et } \eta \in \Omega_{kj}, \text{ alors } \omega \text{ et } \eta \text{ ont au moins un sommet commun.} \end{array} \right.$$

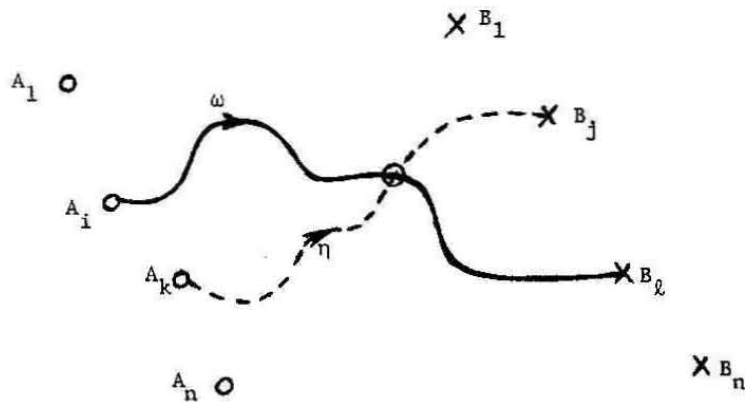


Figure 3. Condition des croisements.



Dans ce cas, seule la permutation identité apparaît dans le second membre de (11), et nous énonçons

Proposition 3 - Avec les notations de la proposition 2, si la condition (12) des croisements est vérifiée, alors

$$(13) \quad \det(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \sum_{(\omega_1, \dots, \omega_n)} v(\omega_1) \dots v(\omega_n),$$

où la sommation est étendue aux configurations de chemins  $\omega_i$  allant de  $A_i$  à  $B_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , et deux à deux disjoints.

Remarque 4. Usuellement, les chemins utilisés ont des pas élémentaires "au plus proche voisin" ou au "2<sup>ème</sup> plus proche voisin" et la condition des croisements est vérifiée. Dans ce chapitre, nous aurons besoin de la forme générale (11). Néanmoins, les chemins considérés ici vérifient "presque" la condition des croisements.

Preuve de la proposition 2.

Notons  $E$  l'ensemble des éléments  $(\sigma; \omega_1, \dots, \omega_n)$  avec  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  et tel que pour  $1 \leq i \leq n$ ,  $\omega_i$  est un chemin de  $\Omega_{i, \sigma(i)}$ . Soit  $NC \subseteq E$  les éléments formés de chemins deux à deux disjoints.

Supposons que nous construisons une involution  $\Theta : E \setminus NC \rightarrow E \setminus NC$  vérifiant la condition

$$(14) \quad \begin{cases} \Theta(\sigma; \omega_1, \dots, \omega_n) = (\sigma'; \omega'_1, \dots, \omega'_n) \text{ avec } (-1)^{\text{Inv}(\sigma)} = -(-1)^{\text{Inv}(\sigma')} \\ \text{et} & v(\omega_1) \dots v(\omega_n) = v(\omega'_1) \dots v(\omega'_n) . \end{cases}$$

Il est clair que ceci implique (11).

Nous construirons  $\Theta$  comme suit.

Soit  $\xi = (\sigma; \omega_1, \dots, \omega_n) \in E \setminus NC$ . Il existe un indice  $k$ , le plus petit  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$  tel que  $\omega_i$  intersecte un autre chemin  $\omega_j$  de  $\xi$ . Soit  $C$  le premier sommet de  $\omega_i$  (en suivant  $\omega_i$  de  $A_i$  à  $B_{\sigma(i)}$ ) tel que  $C$  appartienne à un autre chemin  $\omega_j$  de  $\xi$ . Maintenant soit  $\ell$  le plus petit indice  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$  (en fait  $k < \ell \leq n$ ) tel que  $\omega_j$ ,  $j \neq i$ , passe par  $C$ .

On définit alors la transposition  $\tau \in \mathfrak{S}_n$  qui échange les éléments  $\sigma(k)$  et  $\sigma(\ell)$ .

Le chemin  $\omega_k$  (resp.  $\omega_\ell$ ) se factorise  $\omega_k = \eta_k \zeta_k$  (resp.  $\omega_\ell = \eta_\ell \zeta_\ell$ ) dans lequel  $\eta_k$  (resp.  $\eta_\ell$ ) est un chemin allant de  $A_k$  (resp.  $A_\ell$ ) à  $C$ , et  $\zeta_k$  (resp.  $\zeta_\ell$ ) est un chemin allant de  $C$  à  $B_{\sigma(k)}$  (resp.  $B_{\sigma(\ell)}$ ).

On définit alors la nouvelle configuration  $\Theta(\sigma; \omega_1, \dots, \omega_n) = (\sigma'; \omega'_1, \dots, \omega'_n)$  dans laquelle

$$(15) \quad \begin{aligned} \sigma' &= \tau \circ \sigma, & \omega'_k &= \eta_k \zeta_\ell, & \omega'_\ell &= \eta_\ell \zeta_k, \\ \omega'_i &= \omega_i & \text{pour } 1 \leq i \leq n, & & i \neq k, \ell. \end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier que  $\Theta$  est une involution de  $E \setminus NC$  vérifiant (14).

C.Q.F.D.

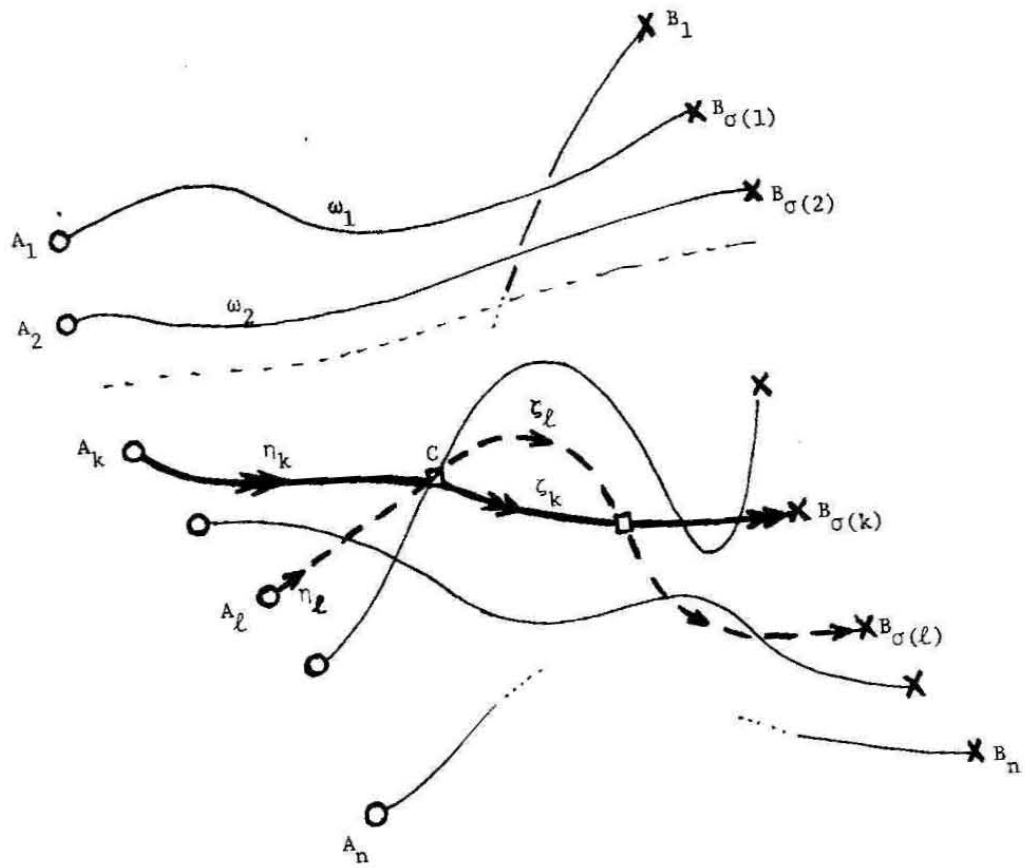


Figure 4. Preuve de la proposition 2.

§3. Déterminants de Hankel de moments

Pour une suite  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$  de moments, notons  $H_\mu$ , ou plus simplement  $H$ , la matrice infinie

$$(16) \quad H = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n & \dots \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} & \dots \\ \mu_{n+1} & \dots & & & \\ \dots & & & & \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire la matrice  $H = (\mu_{i+j})_{0 \leq i, j}$ .

Définition 5. Un déterminant de Hankel est un mineur de  $H$ .

Un tel déterminant sera noté  $H_{\beta_1, \dots, \beta_k}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k}$ , en désignant par  $0 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_k$  et  $0 \leq \beta_1 < \dots < \beta_k$  les indices respectifs des lignes et colonnes du mineur extrait.

Pour  $1 \leq i \leq k$ , soit  $A_i$  (resp.  $B_i$ ) le point  $A_i = (-\alpha_i, 0)$  (resp.  $B_i = (\beta_i, 0)$ ). La somme des valuations (relativement aux  $b_k, \lambda_k$  correspondant aux  $\mu_n$ ) des chemins de Motzkin allant de  $A_i$  à  $B_j$  est  $\mu_{\alpha_i + \beta_j}$ , le terme  $(i, j)$  du déterminant  $H_{\beta_1, \dots, \beta_k}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k}$ . On peut donc énoncer d'après la proposition 2.

Proposition 5. Le déterminant de Hankel  $H_{\beta_1, \dots, \beta_k}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k}$  est la somme  $\sum_{\xi} (-1)^{\text{Inv}(\sigma)} v(\omega_1) \dots v(\omega_k)$  dans laquelle  $\xi = (\sigma; \omega_1, \dots, \omega_k)$  avec  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ,  $\omega_i$  est un chemin allant de  $A_i$  à  $B_{\sigma(i)}$ , et les chemins  $\omega_i$  sont deux à deux disjoints.

Il se peut que la permutation  $\sigma$  ne soit pas l'identité. Dans la configuration de chemins, il y a alors deux chemins  $\omega_i$  et  $\omega_j$  ayant respectivement un pas Sud-Est  $((k,n), (k-1,n+1))$  et un pas Nord-Est  $((k-1,n), (k,n+1))$ . Nous nommerons une telle situation un croisement virtuel des chemins  $\omega_i$  et  $\omega_j$  (voir figure 5).

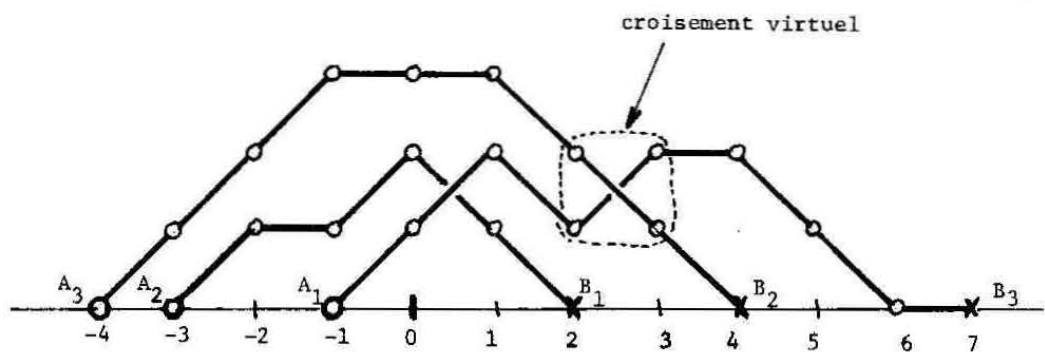


Figure 5. Le déterminant  $H\left(\begin{smallmatrix} 1, 3, 4 \\ 2, 4, 7 \end{smallmatrix}\right)$ .

Par contre, dans le cas de chemins de Dyck, c'est-à-dire si  $b_k = 0$  pour tout  $k \geq 0$ , et si les  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , sont pairs, alors la condition des croisements est vérifiée et la sommation de la proposition 5 se réduit à des couples  $\xi$  avec  $\sigma$  la permutation identité (voir figure 6).

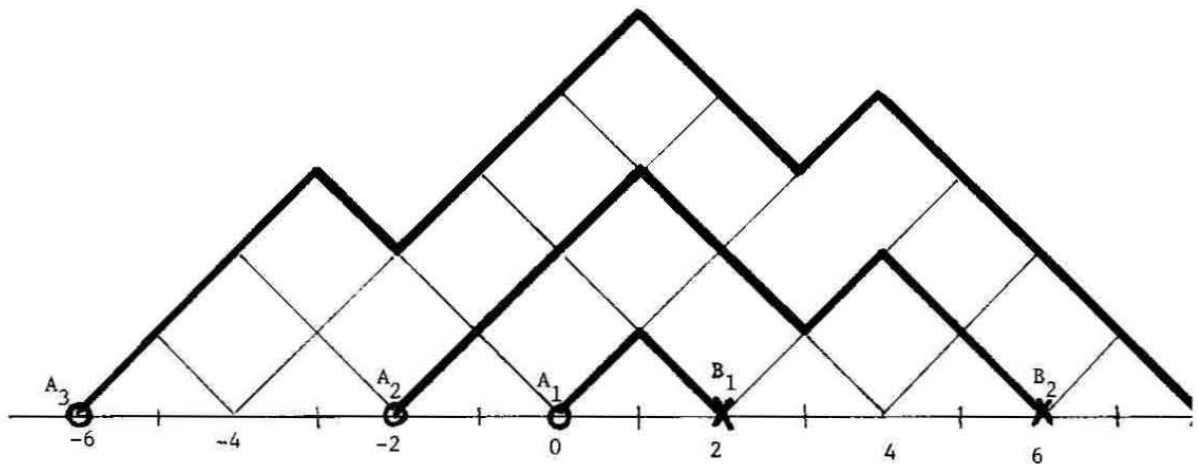


Figure 6. Le déterminant  $H\left(\begin{smallmatrix} 0, 2, 6 \\ 2, 6, 8 \end{smallmatrix}\right)$  avec  $b_k = 0$  pour tout  $k \geq 0$ .

Nous introduisons les deux déterminants

$$(17) \quad \Delta_n = H\left(\begin{smallmatrix} 0, 1, \dots, n \\ 0, 1, \dots, n \end{smallmatrix}\right),$$

$$(18) \quad \chi_n = H\left(\begin{smallmatrix} 0, 1, \dots, n-1, n \\ 0, 1, \dots, n-1, n+1 \end{smallmatrix}\right).$$

Le lecteur vérifiera aisément que les configurations de chemins de la proposition 5 relatives à ces deux déterminants n'ont pas de croisements virtuels et que la permutation  $\sigma$  est nécessairement l'identité. De plus, une seule configuration est possible pour  $\Delta_n$  (voir figure 7): pour  $i = 0, \dots, n$ , le chemin  $\omega_i$  est composé de  $i$  pas Nord-Est, suivis de  $i$  pas Sud-Est. Pour  $\chi_n$ , il y a  $n+1$  configurations possibles

(voir figure 8). Elles se déduisent de la configuration relative à  $\Delta_n$  en insérant un pas Est dans le chemin  $\omega_n$  et après ses  $n$  pas Nord-Est.

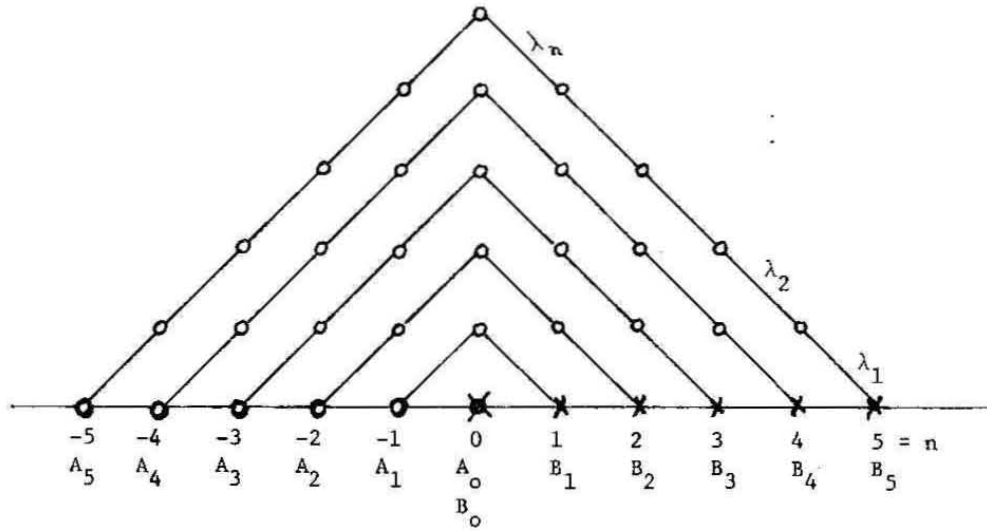


Figure 7. Le déterminant  $\Delta_n$ .

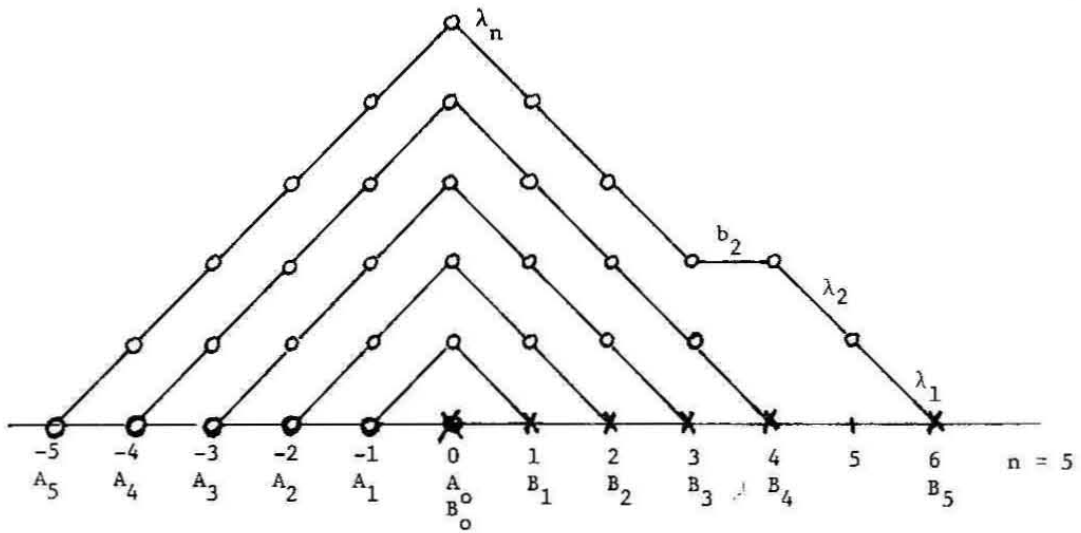


Figure 8. Le déterminant  $\chi_n$ .

Ainsi on déduit immédiatement

Corollaire 6. Les déterminants de Hankel définis par (17) et (18) sont respectivement égaux à

$$(19) \quad \Delta_n = (\lambda_1)^n (\lambda_2)^{n-1} \dots (\lambda_{n-1})^2 \lambda_n \text{ et}$$

$$(20) \quad \chi_n = (b_0 + b_1 + \dots + b_n) \Delta_n.$$

D'après la proposition 1, on déduit aisément

Corollaire 7. Soit  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$  une suite d'éléments du corps  $\mathbb{K}$ . Il existe des suites  $\{b_k\}_{k \geq 0}$  et  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$  vérifiant la relation (I-15) ssi on a

$$(21) \quad \Delta_n \neq 0 \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Dans ce cas ces suites sont uniques et sont données par

$$(22) \quad \lambda_n = \frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2} ; \quad b_n = \frac{\chi_n}{\Delta_n} - \frac{\chi_{n-1}}{\Delta_{n-1}}.$$

En appliquant maintenant le théorème I-9 et le corollaire I-19, on déduit

Corollaire 8. Soit  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$  une suite d'éléments du corps  $\mathbb{K}$ . Il existe des polynômes orthogonaux pour cette suite (de moments) ssi la condition (21) est satisfaite.

On peut se poser les questions analogues à celles des corollaires 7 et 8, lorsque l'on se restreint aux chemins de Dyck, c'est-à-dire lorsque  $b_k = 0$  pour tout  $k$ . Les moments d'ordre impair  $\mu_{2n+1}$  sont nuls et les polynômes orthogonaux associés vérifient

$$(23) \quad P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Soit donc  $\{v_n\}_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{K}$ . On cherche une suite  $\{\lambda_k\}_{k \geq 0}$



telle que

$$(24) \quad \sum_{|\omega|=2n} v(\omega) = v_n \quad ,$$

où la sommation est étendue à tous les chemins de Dyck de longueur  $2n$ .

D'une manière analogue au §1, on peut calculer récursivement  $\lambda_n$  connaissant  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  à condition toutefois que  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  soit non nul.

On définit alors les déterminants  $\Delta_n(v)$  comme en (17), mais en remplaçant  $\mu$  par  $v$ , (en fait  $\mu_{2n} = v_n$  et  $\mu_{2n+1} = 0$ ) et  $\Delta_n^{(1)}(v)$  par

$$(25) \quad \Delta_n^{(1)}(v) = H_v(1, \dots, n).$$

On vérifie aisément que ces déterminants correspondent chacun à une seule configuration de chemins, représentée dans les figures 9 et 10.

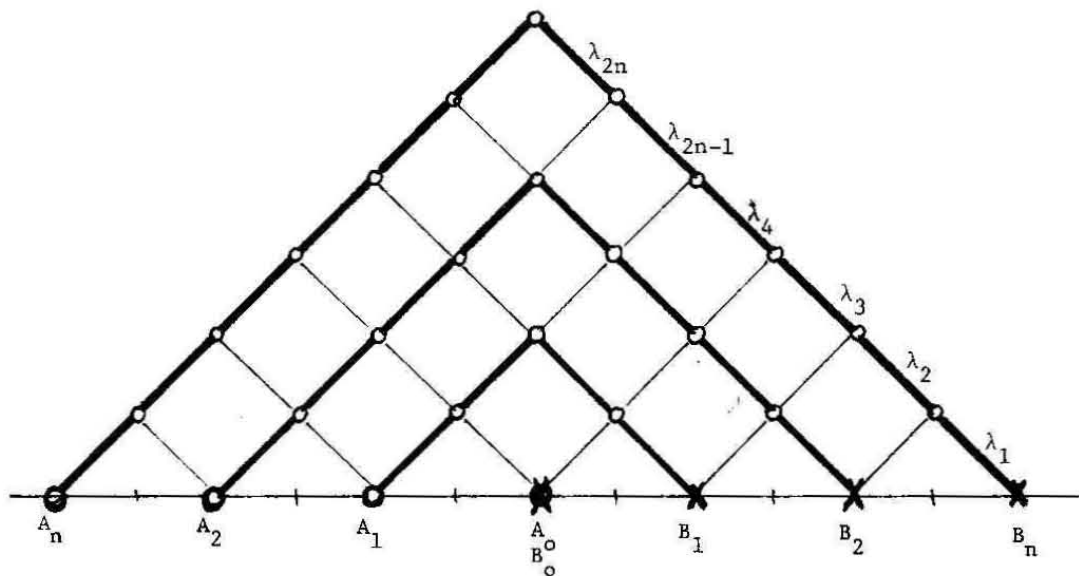


Figure 9. Le déterminant  $\Delta_n(v)$ .

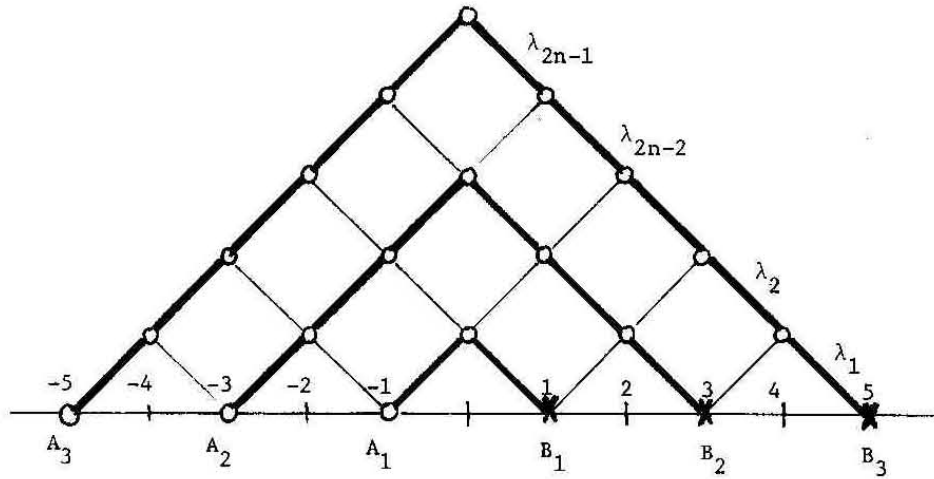


Figure 10. Le déterminant  $\Delta_n^{(1)}(v)$ .

On peut donc écrire les relations

$$(26) \quad \Delta_n(v) = (\lambda_1 \lambda_2)^n (\lambda_3 \lambda_4)^{n-1} \dots (\lambda_{2n-1} \lambda_{2n}),$$

$$(27) \quad \Delta_n^{(1)}(v) = \lambda_1^n (\lambda_2 \lambda_3)^{n-1} \dots (\lambda_{2n-2} \lambda_{2n-1}),$$

d'où on déduit les analogues des corollaires 7 et 8

Corollaire 9. Soit  $\{v_n\}_{n \geq 0}$  une suite d'éléments du corps  $K$ . Il existe une suite  $\{\lambda_k\}_{k \geq 0}$  vérifiant la relation (24) ssi on a

$$(28) \quad \Delta_n(v) \neq 0 \text{ et } \Delta_n^{(1)}(v) \neq 0 \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Dans ce cas, cette suite est unique et est donnée par

$$(29) \quad \lambda_{2n} = \frac{\Delta_n(v)}{\Delta_n^{(1)}(v)} : \frac{\Delta_{n-1}(v)}{\Delta_{n-1}^{(1)}(v)} \quad (n \geq 1) ; \quad \lambda_{2n+1} = \frac{\Delta_{n-1}^{(1)}(v)}{\Delta_n^{(1)}(v)} : \frac{\Delta_n^{(1)}(v)}{\Delta_{n-1}^{(1)}(v)} \quad (n \geq 0).$$

Corollaire 10. Soit  $\{v_n\}_{n \geq 0}$  une suite d'éléments du corps  $\mathbb{K}$ . Il existe des poly-  
nômes orthogonaux ayant pour moments  $\mu_{2n+1} = 0$  et  $\mu_{2n} = v_n$ ,  $n \geq 0$ , ssi la condition  
(28) est satisfaite.

§4. La dualité entre chemins de Motzkin et chemins de Favard

Pour  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ , suite de moments du corps  $K$ , on considère les polynômes  $D_n(x)$  définis pour  $n \geq 0$  par la relation

$$(30) \quad D_n(x) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & & x^n \end{vmatrix}$$

Pour  $p$ ,  $1 \leq p \leq n$ , le coefficient  $a_{n,p}$  de  $x^p$  dans  $D_n(x)$  est donné par

$$(31) \quad a_{n,p} = (-1)^{n-p} H \begin{pmatrix} 0, 1, \dots, n-1 \\ 0, 1, \dots, p-1, p+1, \dots, n \end{pmatrix}.$$

Ce déterminant est interprété par des configurations de chemins deux à deux disjoints ayant le type de celle de la figure 11.

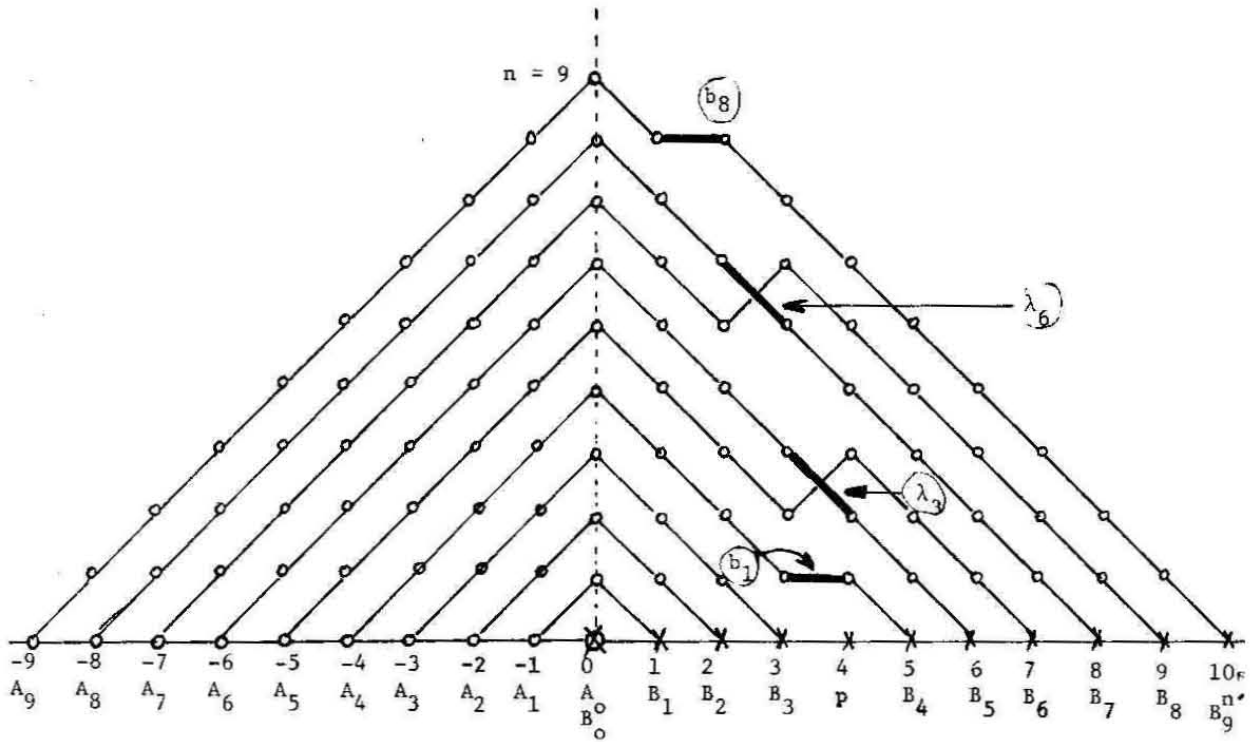


Figure 11. Le déterminant  $H \begin{pmatrix} 0, 1, \dots, n-1 \\ 0, 1, \dots, p-1, p+1, \dots, n \end{pmatrix}$ .

Dans cette figure,  $A_i = (-i, 0)$  pour  $0 \leq i \leq n-1$ ,  $B_i = (i, 0)$  pour  $0 \leq i \leq p$  et  $B_i = (i+1, 0)$  pour  $p < i \leq n$ . L'élément  $\xi = (\sigma; \omega_0, \dots, \omega_{n-1})$  de la proposition 2 a le type suivant. Les chemins  $\omega_i$ ,  $0 \leq i \leq p-1$ , sont, comme pour le déterminant  $\Delta_n$ , formés de  $i$  pas Nord-Est suivis de  $i$  pas Sud-Est. Pour  $p \leq i \leq n$ , chaque chemin  $\omega_i$  est une suite de  $i$  pas

pas Nord-Est, suivie d'un chemin ayant l'un des trois types suivants:

- (i)  $i$  pas Sud-Est consécutifs
- (ii) un pas Est parmi  $i$  pas Sud-Est,
- (iii) un pas Nord-Est parmi  $i+1$  pas Sud-Est.

De plus, si  $\omega_i$  a le type (iii), alors  $\omega_{i+1}$  a nécessairement le type (i).

En somme, il peut y avoir des croisements virtuels, mais ceux-ci ne peuvent se produire (qu'une seule fois par chemin) qu'entre deux chemins consécutifs  $\omega_i$  et  $\omega_{i+1}$  allant respectivement de  $A_i$  à  $B_{i+1}$  et de  $A_{i+1}$  à  $B_i$ . Ainsi il existe un pavage  $\beta$  (en monominos et dominos) du segment  $[0, n-1]$  tel que chaque monomino  $k$  (resp. domino  $\{k-1, k\}$ ) corresponde à un pas Est (resp. un pas Sud-Est suivant un pas Nord-Est) au niveau  $k$  d'un chemin  $\omega_i$  du type (ii) (resp. (iii)).

De plus la permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , notée ici par commodité comme bijection de  $[0, n-1]$  sur lui-même, est définie par la relation

$$(32) \begin{cases} \sigma(i)=i & \text{si } 0 \leq i < p \quad \text{ou si } \omega_i \text{ est du type (ii),} \\ \sigma(i)=i+1 \text{ et } \sigma(i+1)=\sigma(i) & \text{si } \omega_i \text{ est du type (iii) (et } \omega_{i+1} \text{ du type (i)).} \end{cases}$$

Il est aisé de voir que la correspondance  $\xi = (\sigma; \omega_0, \dots, \omega_{n-1}) \mapsto \beta$  est une bijection entre les configurations  $\xi$  de la proposition 5 et les pavages  $\beta$  de  $[0, n-1]$ .

Soit  $v(\beta)$  la valuation du pavage  $\beta$  de  $[0, n-1]$  définie comme au chapitre I ( $-b_k$  pour un monomino  $\{k\}$  et  $-\lambda_k$  pour un domino  $\{k-1, k\}$ ). Notons  $m(\beta)$  (resp.  $d(\beta)$ ) le nombre de monominos (resp. dominos) du pavage  $\beta$ . Il est clair que

$$(33) \quad v(\omega_0) \dots v(\omega_{n-1}) = (-1)^{m(\beta)+d(\beta)} v(\beta) \Delta_n.$$

Le nombre d'inversion de  $\sigma$  est, d'après (32),  $\text{Inv}(\sigma) = d(\beta)$ .

En conclusion on a

$$(34) \quad H_{\substack{0,1,\dots,p-1, p+1,\dots,n \\ 0,1,\dots,p-1, p+1,\dots,n}} = \sum_{\beta} (-1)^{m(\beta)} v(\beta) \Delta_n,$$

où la sommation est parmi les pavages  $\beta$  de  $[0, n-1]$ . Comme le nombre  $p(\beta)$  de points isolés de  $\beta$  est égal à  $p$ , on déduit (avec la même sommation qu'en (34))

$$(35) \quad a_{n,p} = \sum_{\beta} v(\beta) \Delta_n.$$

Ainsi si la condition (21) est vérifiée, les polynômes orthogonaux unitaires  $P_n(x)$  dont les moments sont  $\mu_n, n \geq 0$ , peuvent s'écrire

$$(36) \quad P_n(x) = \frac{1}{\Delta_n} D_n(x).$$

Le pavage  $\beta$  peut aussi être codé par un chemin de Favard  $\eta$  (ou plus exactement le symétrique d'un chemin de Favard par rapport à un axe vertical). Ce chemin a ses sommets dans  $\Pi_{\frac{1}{2}}$ , l'ensemble des points de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dont les coordonnées sont des nombres de la forme  $i + \frac{1}{2}$  avec  $i \in \mathbb{Z}$ . Le point de départ est le point

$E_p = (p + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  et le point d'arrivée est le point  $F_n = (\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ . A chaque pas Est  $((k, i), (k, i+1))$  d'un chemin  $\omega_i$ , on associe le pas Nord  $((k - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}), (k + \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}))$  (valué  $-b_k$ ) de  $\eta$ . A chaque croisement virtuel de chemins  $\omega_i$  et  $\omega_{i+1}$ , avec  $((k-1, i), (k, i+1))$  comme pas Nord-Est de  $\omega_i$ , on associe le pas Nord-Nord  $((k-1-\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}), (k+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}))$  (valué  $-\lambda_k$ ) de  $\eta$ . La figure 12 est un agrandissement de la moitié droite de la figure 11, et montre cette correspondance.



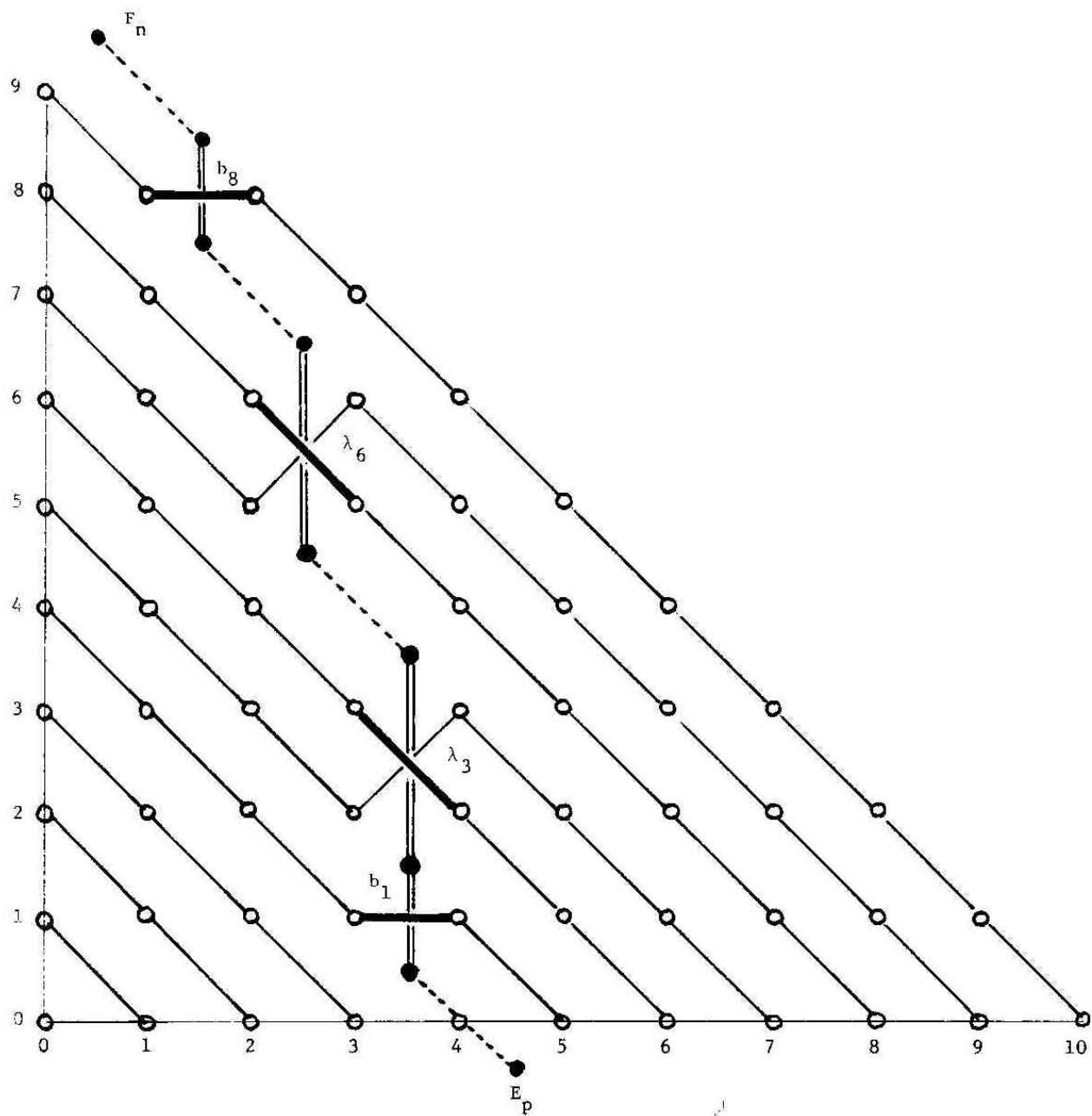


Figure 12. La dualité entre chemins de Motzkin et chemins de Favard

Un cas particulier de cette dualité est obtenue avec les chemins tels que  $\lambda_k = 0$ . On obtiendrait alors les théorèmes d'inversion du chapitre III avec la matrice des coefficients binomiaux, les nombres de Stirling de 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> espèce, ou encore les fonctions symétriques homogènes et élémentaires. En fait dans ce cas les chemins de Motzkin sans pas Sud-Est sont d'une "espèce" isomorphe aux chemins de Favard sans pas Nord-Nord. Ceci interprète le fait que l'inverse de la matrice  $(a_{ij}) = \binom{i}{j}$  est  $(b_{ij}) = (-1)^{i+j} \binom{i}{j}$ .

D'une manière plus générale, lorsque les chemins vérifient la condition des croisements et que  $\det(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  est interprété par une seule configuration  $\xi$  de chemins deux à deux disjoints, un cofacteur  $(n, p)$  est interprété par un chemin "dual". Ce chemin dual traduit la "propagation", dans la configuration  $\xi$ , du "trou" créé au point  $E_p$ . On pourrait alors démontrer qu'une configuration de chemins interprétant un mineur de  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  est en bijection avec une configuration de chemins duaux interprétant le mineur "complémentaire" de  $A^{-1}$ . Nous aurions ainsi une interprétation du classique théorème de Jacobi, que nous énonçons sous la forme suivante.

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ ,  $A^{-1} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  et notons  $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  avec  $c_{ij} = (-1)^{i+j} b_{ij}$ . Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux parties de  $[n]$  de même cardinal, notons  $A(\alpha|\beta)$  le mineur de  $A$  correspondant aux lignes d'indices dans  $\alpha$  et aux colonnes d'indices dans  $\beta$ . Alors le théorème de Jacobi affirme

$$(37) \quad A(\alpha|\beta) = \det(A) C([n] \setminus \alpha | [n] \setminus \beta).$$

§5- Séries inverses

Soit  $f(t) = \sum_{n \geq 0} \mu_n t^n$  une série entière et soit  $g(t) = \frac{1}{f(t)}$  la série inverse (rappelons que nos conventions imposent  $\mu_0 = 1$ ).

Dans la théorie des "approximants de Padé" d'une fonction  $f$  (théorie dont nous disons un mot au chapitre suivant), il est commode d'introduire, pour tous  $m, n \geq 0$ , les déterminants

$$(38) \quad f_{m,n} = \begin{vmatrix} \mu_m & \mu_{m-1} & \dots & \mu_{m-n+1} \\ & \mu_{m+1} & \dots & \mu_{m-1} \\ & & \dots & \mu_{m-1} \\ \mu_{m+n-1} & \dots & \mu_{m+1} & \mu_m \end{vmatrix} = \det(\mu_{m+i-j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

Nous convenons  $\mu_i = 0$  pour  $i < 0$ . Au signe près, ces déterminants sont des déterminants de Hankel:

$$(39) \quad f_{m,n} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det(\mu_{m-n+1+i+j})_{0 \leq i, j \leq n-1}$$

Soit  $g_{m,n}$  les déterminants analogues à (38) pour la série inverse  $g$ . Une propriété importante dans la théorie des approximants de Padé est

Proposition 11. Soit  $f(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} \mu_n t^n$  et  $g(t) = \frac{1}{f(t)}$  la série inverse.  
Avec la notation (38), on a

$$(40) \quad g_{n,m} = (-1)^{nm} f_{m,n} \text{ pour tout } n, m \geq 1.$$

Nous allons interpréter cette relation par la géométrie des configurations de chemins deux à deux disjoints.

Supposons qu'il existe une suite  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$  telle que  $\mu_n$  soit la somme des valuations des chemins de Dyck de longueur  $2n$  (En fait la preuve de la relation (40) dans ce cas impliquerait par "continuité" le cas général pour lequel la relation (28) n'est pas nécessairement satisfaite).

Nous considérons maintenant  $f(t)$  comme une fonction de  $t$  paramétrée par les coefficients  $\lambda_k$ ,  $k \geq 1$  (qui peuvent être éventuellement nuls), soit  $f(t) = f(t; \lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots)$ . On définit alors la fonction  $\delta f$ , obtenue en décalant d'une unité tous les indices des paramètres, soit

$$(41) \quad \delta f(t) = f(t; \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}, \dots).$$

La fonction  $t \delta f(t)$  est interprétée par

$$(42) \quad t \delta f(t) = \sum_{\omega} v(\omega) t^{|\omega|},$$

où la sommation est étendue aux chemins de Dyck premiers  $\omega$ , c'est-à-dire aux chemins de Dyck non vides qui ne sont pas produit de chemins de Dyck non vides, c'est-à-dire encore les chemins de Dyck non vides n'ayant aucun point, sauf les extrémités, au niveau 0.

Comme tout chemin de Dyck  $\omega$  se factorise de manière unique en produit de chemins de Dyck premiers (il suffit de considérer les sommets de  $\omega$  au niveau 0), on a le

Lemme 11. Avec la notation (41), on a

$$(43) \quad f(t) = \frac{1}{1-t\delta f(t)}$$

Dans la relation (40), on peut toujours supposer  $n \geq m$ . Notons  $A_i$  (resp.  $B_i$ ),  $1 \leq i \leq n$  les points de l'axe des  $x$  d'abscisse  $2(i-m)$  (resp.  $2i$ ). Soit  $\sigma_{n,m}$  la permutation de  $\mathfrak{S}_n$  définie par

$$\begin{aligned} \sigma(i) &= n-i+1 & \text{pour } i=1, \dots, m, \\ \sigma(i) &= i-m & \text{pour } i=m+1, \dots, n. \end{aligned}$$

La condition des croisements est vérifiée, et d'après la proposition 5, il est clair que

$$(45) \quad f_{m,n} = \sum_{(\omega_1, \dots, \omega_n)} (-1)^{\text{Inv}(\sigma_{n,m})} v(\omega_1) \dots v(\omega_n),$$

dans lequel la sommation est étendue aux configurations de chemins  $\omega_i$  deux à deux disjoints tels que  $\omega_i$  va de  $A_i$  à  $B_{\sigma_{n,m}(i)}$  (voir figure 13).

Remarquons qu'une seule permutation apparaît dans la sommation de la proposition 5.

Les chemins  $\omega_{m+1}, \dots, \omega_n$  sont réduits à un point. Les chemins  $\omega_1, \dots, \omega_m$  sont les mêmes que ceux interprétant le déterminant de Hankel  $\det(\mu_{n-m+1+i+j})_{0 \leq i, j \leq n-m}$  avec la restriction que ces chemins ne coupent pas les chemins  $\omega_{m+1}, \dots, \omega_n$ , c'est-à-dire les points  $B_1, \dots, B_{n-m}$ . Cette dernière restriction n'est pas autre chose que dire que ces chemins  $\omega_1, \dots, \omega_m$  sont premiers.

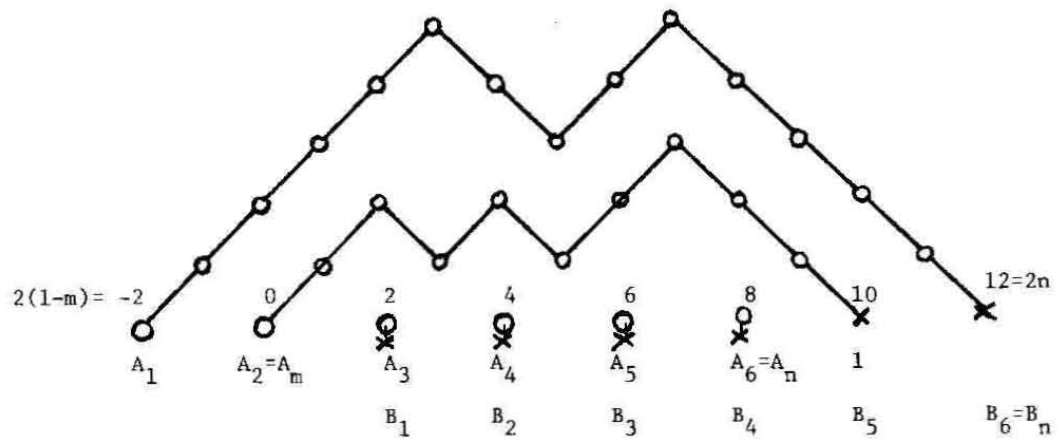


Figure 13. Les déterminants  $f_{m,n}$  et  $g_{n,m}$  (pour  $n=6, m=2$ ).

D'autre part, d'après les relations (42) et (43) le terme  $(i,j)$  du déterminant  $g_{n,m}$  est, lorsque  $1 \leq m \leq n$ , l'opposé de la somme des valuations  $v(\omega)$  des chemins de Dyck premiers  $\omega$  allant de  $A_1$  à  $B_{m+i-j}$ . Ce cas ne rentre pas tout à fait dans le cadre général de la proposition 2.

Mais on pourrait refaire la preuve dans le cas considéré, et construire une involution  $\theta$  conservant le fait d'être premiers pour les chemins de Dyck. Soit  $\tau_m$  la permutation de  $\mathbb{S}_m$  complémentaire de l'identité, c'est-à-dire  $\tau_m(i) = m+1-i$  pour  $1 \leq i \leq m$ .

Il vient donc



Chapitre V - Fractions continuées -

Nous montrons l'équivalence classique entre la théorie des polynômes orthogonaux généraux et celle des développements d'une fonction  $\sum_{n \geq 0} \mu_n t^n$  en fraction continuée du type Jacobi (J-fraction). Cette équivalence est essentiellement la proposition 2 du §3, que nous démontrons bijectivement. Curieusement, cette bijection est presque la même que celle démontrant l'orthogonalité au chapitre I ou que celle interprétant les polynômes inverses au chapitre III.

Le §1 rappelle le théorème de Flajolet sur le développement en J-fraction d'une série formelle  $\sum_{n \geq 0} \mu_n t^n$ .

Il apparaît que le calcul de la J-fraction n'est pas autre chose que le calcul des  $b_k, \lambda_k, k \geq 0$  connaissant les  $\mu_n, n \geq 0$  (voir chapitre IV, §1).

Egalement, écrire un développement en fraction continuée revient à déterminer la série génératrice des moments  $\mu_n$  connaissant les valuations  $b_k, \lambda_k, k \geq 0$ . La méthodologie des histoires (chapitre II et III) fournit ainsi toute une série d'exemples. En particulier il y a les dix séries génératrices  $s(t)$  (histoires restreintes) et  $q(t)$  (histoires larges) relatives aux cinq familles de polynômes orthogonaux de Sheffer (Laguerre  $L_n^{(\alpha)}(x)$ , Hermite  $H_n(x)$ , Charlier  $C_n^{(a)}(x)$ , Meixner I  $m_n(x; \beta, c)$  et Meixner II  $M_n(x; \delta, \eta)$ , voir table III-4). Nous donnons au §2 onze autres exemples, ne se ramenant pas à ceux de la table III-4. Chacun d'eux est la traduction



d'une certaine bijection combinatoire. Certaines de ces bijections sont à nouveau issues de la bijection (fondamentale) entre permutations et histoires de Laguerre.

Un de ces exemples est relatif aux célèbres identités de Rogers-Ramanujan et est traité à part au §4.

Le §5 montre que les opérations classiques de contraction dans une fraction continuée reviennent à effectuer des contractions (ou tassements) dans les chemins. La géométrie des chemins permet ainsi d'écrire immédiatement les relations liant les coefficients  $b_k$ ,  $\lambda_k$  correspondants.

Enfin le §6 est une généralisation des fractions continuées aux chemins de Lukasiewicz du chapitre III, §5. On introduit la notion nouvelle de "fractions multicontinuées" (ou L-fraction). Dans le cas particulier où les valuations  $\lambda_{k,\ell} = d_{k-\ell}$  ne dépendent que de  $k-\ell$ , on est alors très proche de la combinatoire sous-jacente à l'inversion de Lagrange. D'ailleurs l'équation fonctionnelle (55) dans le cas  $\lambda_{k,\ell} = q^k d_{k-\ell}$  rappelle fort le  $q$ -analogue de l'inversion de Lagrange de Gessel [21].

Remarquons que l'on emploie habituellement l'adjectif "continue" au lieu de "continuée" (en anglais "continued"), mais l'étude de la continuité des fonctions écrites sous forme de fractions continuées est une autre histoire...

## §1- Développement en J-fraction -

Soit  $\{b_k\}_{k \geq 0}$  et  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$  des suites de l'anneau  $\mathbb{K}$ . Comme dans tout ce travail, pour  $n \geq 0$ ,  $\mu_n$  désigne la somme (I-15) des valuations  $v(\omega)$  des chemins de Motzkin de longueur  $n$ . La série génératrice  $f(t) = \sum_{n \geq 0} \mu_n t^n$  sera notée aussi  $f(t; b_0, b_1, \dots, b_n, \dots; \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots)$ . On désigne par  $\delta f$  la série obtenue en augmentant d'une unité tous les indices

$$(1) \quad \delta f = f(t; b_1, b_2, \dots, b_n, \dots; \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}, \dots).$$

Nous noterons également  $\delta \mu_n$  les moments correspondants:

$$\delta f(t) = \sum_{n \geq 0} \delta \mu_n t^n.$$

La relation (IV-42) relative aux chemins de Dyck se généralise immédiatement aux chemins de Motzkin. Un chemin de Motzkin premier est un chemin non vide n'ayant pas d'autres sommets au niveau 0 que les extrémités.

Il est clair que tout chemin de Motzkin premier  $\omega$  est soit un pas Est (valué  $b_0$ ), soit se factorise (de manière évidemment unique)  $\omega = u \omega^{(1)} v$ , avec  $u$  (resp  $v$ ) pas Nord-Est (resp. Sud-Est) allant du niveau 0 au niveau 1 (resp. du niveau 1 au niveau 0), et  $\omega^{(1)}$  est un chemin de Motzkin (éventuellement vide) allant du niveau 1 au niveau 1 formé de sommets situés à un niveau  $\geq 1$ .

D'autre part, il est clair que tout chemin de Motzkin non vide  $\omega$  se factorise de manière unique en produit de chemins de Motzkin premiers (il suffit de considérer les sommets de  $\omega$  situés au niveau 0).

Ainsi la relation (IV-43) devient ici

$$(2) \quad f(t) = \frac{1}{1 - b_0 t - \lambda_1 t^2 \delta f(t)}$$

En itérant l'équation fonctionnelle (2), on obtient immédiatement

$$(3) \quad f(t) = \frac{1}{1 - b_0 t - \lambda_1 t^2} \frac{1}{1 - b_1 t - \lambda_2 t^2} \frac{1}{\dots} \frac{1}{1 - b_k t - \lambda_{k+1} t^2 \delta^k f(t)}$$

Notons  $J_k(t)$  la fraction rationnelle obtenue en faisant  $\lambda_{k+1} = 0$  dans l'expression (3). La somme (I-15)  $\mu_n = \sum_{|\omega|=n} v(\omega)$  est alors réduite à

$$(4) \quad \mu_n^{\leq k} = \sum_{\omega} v(\omega) ,$$

où la sommation est étendue aux chemins de Motzkin de longueur  $n$  bornés au niveau  $k$ . Ainsi, on a aussi

$$(5) \quad J_k(t) = \sum_{n \geq 0} \mu_n^{\leq k} t^n .$$

Soit  $m \geq 0$ . Tout chemin de Motzkin de longueur  $\leq 2m$  est borné par le niveau  $m$ . Donc pour tout  $k \geq m$ , les deux séries  $J_k(t)$  et  $f(t)$  ont mêmes termes de degré  $\leq 2m+1$ . Ainsi, pour la topologie ultramétrique usuelle des séries formelles  $\mathbb{K}[[t]]$ , la suite  $\{J_k(t)\}_{k \geq 0}$  admet une limite, et cette limite est  $f(t)$ .

Cette limite est habituellement notée en remplaçant dans l'expression (3),  $\delta^k f(t)$  par des points de suspension, et est appelée fraction continuée de Jacobi, ou J-fraction. La série (rationnelle)  $J_k(t)$  est appelée convergent ou réduite d'ordre  $k$  de la J-fraction.

Nous pouvons donc énoncer

Proposition 1 - Soient  $\{b_k\}_{k \geq 0}$  et  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$  deux suites de l'anneau  $\mathbb{K}$ , et  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$  la suite définie par (I-15). Pour  $k \geq 0$ , les coefficients  $\mu_n^{\leq k}$  définis par (4), ont une série génératrice  $J_k(t)$  donnée par

$$(6) \quad J_k(t) = \sum_{n \geq 0} \mu_n^{\leq k} t^n = \frac{1}{1 - b_0 t - \lambda_1 t^2} \cfrac{1}{1 - b_1 t - \lambda_2 t^2} \cfrac{\dots \dots \dots}{1 - b_k t}$$

Les séries rationnelles  $J_k(t)$  convergent dans l'anneau  $\mathbb{K}[[t]]$  vers la série  $\sum_{n \geq 0} \mu_n t^n$ , qui admet ainsi le développement en J-fraction

$$(7) \quad \sum_{n \geq 0} \mu_n t^n = \frac{1}{1 - b_0 t - \lambda_1 t^2} \cfrac{1}{1 - b_1 t - \lambda_2 t^2} \cfrac{\dots \dots \dots}{1 - b_k t - \lambda_{k+1} t^2} \cfrac{\dots \dots \dots}{\dots \dots \dots}$$

Lorsque les  $b_k, k \geq 0$ , sont tous nuls, nous avons alors une fraction continuée du type Stieltjes (en variable  $t^2$ ), appelée encore S-fraction. Ces fractions correspondent donc aux chemins de Dyck.

Nous appellerons S-fraction associée à une suite  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  la fraction continuée

$$(8) \quad S(t) = \frac{1}{1 - \lambda_1 t} \cfrac{1}{1 - \lambda_2 t} \cfrac{\dots \dots \dots}{1 - \lambda_k t} \cfrac{\dots \dots \dots}{\dots \dots \dots}$$

c'est-à-dire celle obtenue à partir de (7) en remplaçant  $b_k$  par 0 ( $k \geq 0$ ) et  $t^2$  par  $t$ .

Maintenant on peut appliquer les théorèmes des §1 et 3 du chapitre IV. Ainsi une fonction  $f(t) = \sum_{n \geq 0} \mu_n t^n$  admet au plus un développement en J-fraction (7) ou en S-fraction (8) (en convenant que le développement s'arrête sous la forme (6) dès que  $\lambda_{k+1} = 0$  avec  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k \neq 0$ ).

Le calcul effectif des coefficients  $b_k, \lambda_k, k \geq 0$  a été fait au chapitre IV, §1. Les conditions suffisantes d'existence (et unicité) sont (IV-21) pour les J-fractions et (IV-28) pour les S-fractions.

§2- Exemples-

En combinant la proposition 1 avec les constructions associées aux histoires (restreintes) du chapitre II (Laguerre, Hermite, Charlier, Meixner I, Meixner II) et aux histoires larges correspondantes du chapitre III, on obtient toute une profusion de développements en J-fractions de fonctions de l'analyse classique. Il suffit de reporter dans (6) les valeurs données par les tables 1 et 2 du chapitre III pour avoir les développements des séries ordinaires  $\sum_{n \geq 0} \mu_n t^n$  et  $\sum_{n \geq 1} q_n t^n$  des quantités de la table III-3. Remarquons que la transformation de Laplace associant à une fonction  $f(t)$  la fonction (de la variable  $u$ )  $L(f)$

$$(9) \quad L(f) = \int_0^{\infty} e^{-t} f(tu) dt ,$$

transforme (formellement) la série génératrice exponentielle  $s(t) = \sum_{n \geq 0} \mu_n \frac{t^n}{n!}$  en la série génératrice ordinaire  $L(s) = \sum_{n \geq 0} \mu_n t^n$ .

On obtient donc par la combinatoire des histoires les développements en fractions continuées des transformées de Laplace des dix fonctions  $s(t)$  et  $q(t)$  de la table III-4 correspondant aux cinq familles de polynômes orthogonaux de Sheffer: Laguerre  $L_n^{(\alpha)}$ , Hermite  $H_n(x)$ , Charlier  $C_n^{(a)}(x)$ , Meixner I  $m_n(x; \beta, c)$  et Meixner II  $M_n(x; \delta, \eta)$ .

A titre d'exemple, nous écrivons le cas des polynômes de Meixner de 2<sup>ème</sup> espèce pour  $\delta = 0$  et  $\eta = 1$ . Dans ce cas il vient (avec les notations des chapitres II et III),  $a_k = k + 1$ ,  $b_k = 0$ ,  $c_k = k$ ,  $\lambda_k = k^2$ , pour les histoires restreintes et  $a_k = k + 1$ ,  $b_k = 0$ ,  $c_k = k + 1$ ,  $\lambda_k = k(k+1)$ , pour les histoires larges. On déduit ainsi les développements en S-fraction

$$(10) \quad \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{1}{\cos(tu)} dt = \frac{1}{1-1^2 u^2} \frac{1}{1-2^2 u^2} \frac{1}{1-3^2 u^2} \dots$$

$$(11) \quad \int_0^{\infty} e^{-t} \operatorname{tg}(tu) dt = \frac{1}{1-1.2u^2} \frac{1}{1-2.3u^2} \frac{1}{1-3.4u^2} \dots \quad (\text{nombres tangents})$$

Par la bijection du chapitre II entre permutations et histoires de Laguerre (larges ou restreintes), on peut également obtenir combinatoirement d'autres développements en J-fractions, correspondant à des polynômes orthogonaux qui ne sont pas de Sheffer.

Par exemple les nombre de Genocchi  $G_{2n}$  liés aux célèbres nombre de Bernoulli  $B_{2n}$  par la relation

$$(12) \quad G_{2n} = 2(2^{2n-1}-1)B_{2n} \quad (n \geq 1),$$

peuvent être interprétés comme le nombre de permutations alternantes  $\sigma$  de  $\mathcal{S}_{2n-1}$  telles que les choix  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq 2n+1$ , de l'histoire de Laguerre (large) associée  $(\pi\Theta)^{-1}(\sigma) = (\omega; p_1, \dots, p_{2n-1})$  vérifient la condition

$$(13) \quad p_i \text{ est impair pour } 1 \leq i \leq 2n-2.$$

Ainsi le nombre de Genocchi  $G_{2n+2}$  est le moment  $\mu_{2n}$  des polynômes orthogonaux correspondant aux valuations

$$(14) \quad a_k = \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor, \quad b_k = 0, \quad c_k = \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil,$$

dans lequel  $\lceil x \rceil$  ("plafond" de  $x$ ) désigne le plus petit entier plus grand que  $x$ .

On déduit donc

$$(15) \quad \sum_{n \geq 0} G_{2n+2} t^{2n} = \frac{1}{1 - 1.1t^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1.2t^2}{1 - \frac{2.2t^2}{1 - \frac{2.3t^2}{\dots}}}}$$

les fonctions elliptiques de Jacobi définies par les deux relations

$$(16) \quad t = \int_0^\phi \frac{d\theta}{(1 - \alpha^2 \sin^2 \theta)^{1/2}},$$

$$\operatorname{sn}(t, \alpha) = \sin \phi, \quad \operatorname{cn}(t, \alpha) = \cos \phi, \quad \operatorname{dn}(t, \alpha) = (1 - \alpha^2 \sin^2 \phi)^{1/2}$$

peuvent aussi être interprétées par des dénombrements de permutations.

On en déduirait par exemple le développement en fraction continuée

$$(18) \quad \int_0^\infty e^{-t} \operatorname{cn}(tu) dt = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot u^2}{1 + \frac{2 \cdot \alpha^2 u^2}{1 + \frac{3 \cdot u^2}{1 + \frac{4 \cdot \alpha^2 u^2}{\dots}}}}}$$

Plus généralement, chaque développement ayant une forme "agréable" correspond à une suite  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$  réalisée par des  $b_k, \lambda_k, k \geq 0$  ayant une expression "agréable" en  $k$ . Lorsque une telle expression existe, il "doit" y avoir une bijection sous-jacente. Ainsi la table 1 rassemble d'autres moments, ne faisant pas partie des exemples des chapitres précédents, mais que l'on pourrait pour chacun d'eux expliquer par une bijection combinatoire.



	Moments $\mu_n$	$a_k$	$b_k$	$c_k$
1	Nombre de Catalan $C_{n+1}$	1	2	1
2	Polyomino parallélogrammes de périmètre $2n+4$ selon l'aire	$q^{k+1}$	$2q^{k+1}$	$q^{k+1}$
3	nombre d'animaux dirigés de taille $n+1$	1	$b_0=2$ $b_k=1, k \geq 1$	1
4	nombre de Schröder $S_n$	1	3	$c_1=4$ $c_k=2, k \geq 2$
5	$\mu_{2n} = \frac{1}{n} \sum_{0 \leq i \leq n-1} \binom{n}{i} \binom{n}{i+1} \alpha^i$	1	0	$c_{2k}=\alpha$ $c_{2k+1}=1$
6	Rogers-Ramanujan (voir §4)	1	0	$-q^k$
7	nombre de Genocchi $G_{2n+2} = \mu_{2n}$	$\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$	0	$\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$
8	nombre médian de Genocchi $\mu_{2n} = GM_{2n+1}$	$\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$	0	$\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$
9	coefficients de la fonction elliptique de Jacobi $cn(t, \alpha)$	$k+1$	0	$c_{2k}=\alpha^2 k$ $c_{2k+1}=k$
10	moments des polynômes d'Hermite généralisés $\hat{H}_n^{(\mu)}(x)$	1	0	$c_{2k}=1$ $c_{2k+1}=k+\mu+\frac{1}{2}$
11	$\mu_{2n} = \frac{1}{2n+1}$ moments des polynômes de Legendre	$\frac{k+1}{2k+1}$	0	$\frac{k}{2k+1}$

Table 1- Autres exemples de moments.

La 1<sup>ère</sup> ligne est obtenue par une bijection entre les chemins de Dyck de longueur  $2n$  et les chemins de Motzkin colorés de longueur  $n-1$ . La 2<sup>ème</sup> ligne en est un  $q$ -analogue. Le moment  $\mu_n$  correspondant est  $\mu_n = \sum_{0 \leq i} p_{n,i} q^i$ , dans lequel  $p_{n,i}$  désigne le nombre de polyomino parallélogrammes ayant un périmètre  $2n+4$  et une aire  $i-1$ . Rappelons qu'un tel polyomino est une union de  $i-1$  carrés élémentaires contenus entre deux chemins de longueur  $n+2$ , ayant même point de départ et d'arrivée, disjoints sauf aux extrémités, et ayant des pas élémentaires Est ou Nord.

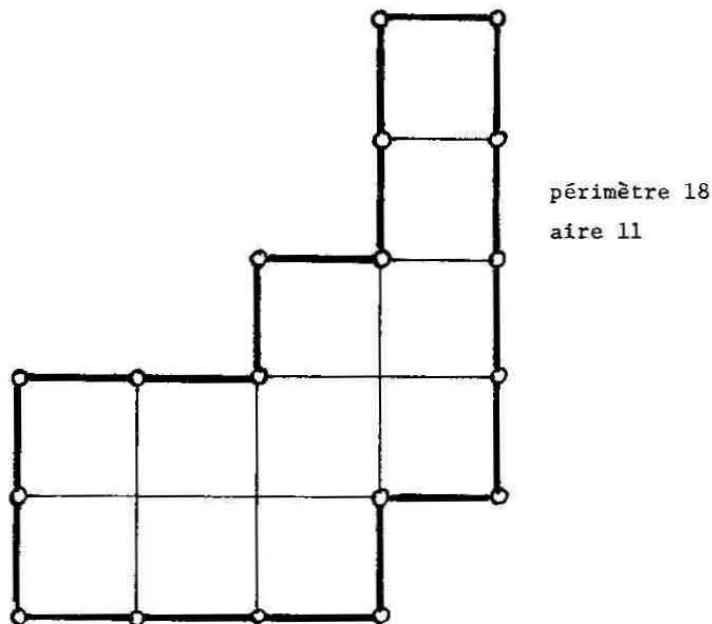


Figure 1- Un polyomino parallélogramme.

On verra une preuve bijective de l'égalité relative à la 2<sup>ème</sup> ligne de la table 1, dans Delest-Viennot [9]. On peut donc écrire la fraction continuée

$$(19) \quad \sum_{0 \leq i, n} p_{n,i} q^i t^n = \frac{1}{1-2q - \frac{q^3 t^2}{1-2q - \frac{q^5 t^2}{\dots}}}$$

En appliquant un q-analogue de l'inversion de Lagrange à l'équation fonctionnelle correspondante (2), Gessel [21] a ainsi prouvé la relation suivante due à Polya [31], en notant  $P(q,t) = qt^2 (\sum_{0 \leq i, n} p_{n,i} q^i t^n)$ ,

$$(20) \quad 2t + P(q,t) + P(q^{-1},t) = 1 - \left[ \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^n q^{-j(n-j)} \left[ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_q^2 t^n \right]^{-1}.$$

La 3<sup>ème</sup> ligne de la table 1 provient d'un problème posé récemment en physique statistique. Le modèle des animaux dirigés a été introduit par les physiciens en liaison avec l'étude des phénomènes critiques (percolation dirigée, modèle des hexagones durs de Baxter, modèle de Lee et Yang en théorie des champs). Un animal dirigé de taille n (voir figure 2) est un ensemble A de n points de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  tel que  $(0,0) \in A$  et tel que tout point de l'animal puisse être atteint par un chemin partant de  $(0,0)$ , ne faisant que des pas élémentaires Est ou Nord, et situé entièrement dans l'animal.

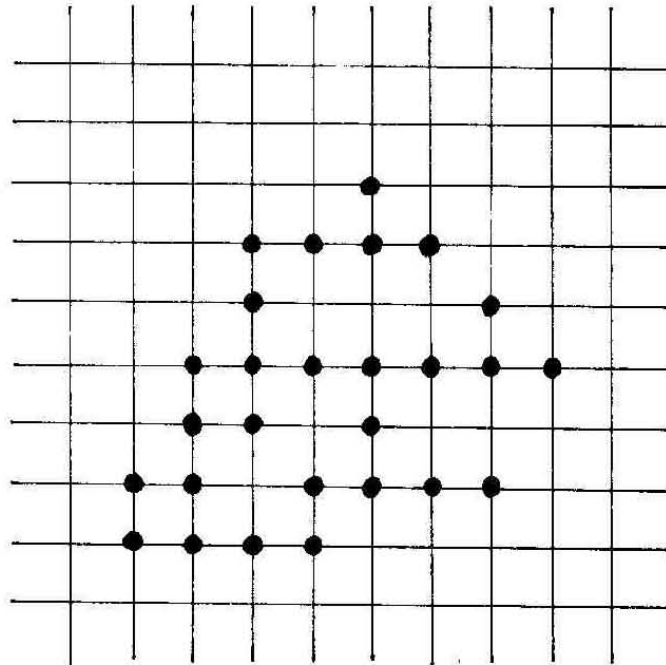


Figure 2. Un animal dirigé

L'égalité exprimée par la 3<sup>ème</sup> ligne de la table 1 n'est pas du tout évidente. Une bijection est donnée dans Gouyou-Beauchamps, Viennot [26]. Cette bijection permet de résoudre les problèmes posés par les physiciens (largeur moyenne, etc...). Pour un exposé de synthèse, voir Viennot [41].

Le 4<sup>ème</sup> ligne du tableau donne le nombre de Schröder  $S_n$ , c'est-à-dire la moitié du nombre de chemins sous-diagonaux allant de  $(0,0)$  à  $(n,n)$  et ayant des pas élémentaires Est, <sup>(Nord et)</sup> Nord-Est (voir figure 3). Une bijection est donnée par Gouyou-Beauchamps [25].

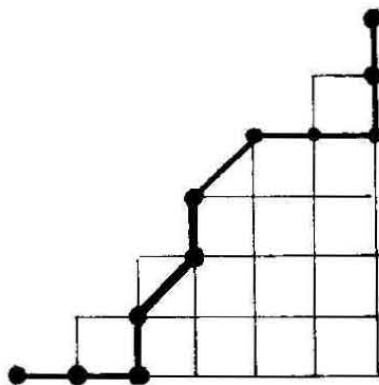


Figure 3. Un chemin interprétant le nombre de Schröder  $S_n$ .

La 5<sup>ème</sup> ligne de la table 1 est relative à un problème issu de considérations de biologie moléculaire: dénombrer les structures secondaires d'acides nucléiques monobrins (c'est-à-dire du type ARN, ARN messager, ARN de transfert) ayant un ordre donné. On se reportera à Vauchassade, Viennot [38]. Remarquons que le nombre  $\frac{1}{n} \binom{n}{i} \binom{n}{i+1}$  est le nombre de chemins de Dyck de longueur  $2n$  ayant  $i + 1$  pics (la succession d'un pas Nord-Est et Sud-Est). Les polynômes orthogonaux correspondant apparaissent comme des "α-analogues" des polynômes de Fibonacci  $F_n(x) = U_n(x/2)$ , avec  $U_n(x)$  le polynôme de Tchebycheff de deuxième espèce.

Avec  $a_k = 1$ ,  $b_k = 0$  et  $c_k = q^k$  on aurait un autre  $q$ -analogue du nombre de Catalan  $C_n$  que celui donné par les polyominos parallélogrammes (2<sup>ème</sup> ligne). Par contre, en prenant  $c_k = -q^k$ , on obtient des choses beaucoup plus profondes relatives aux célèbres identités de Rogers-Ramanujan-Schur (voir le §4).

La 8ème ligne de la table 1 donne les "nombres médian de Genocchi" (voir Dumont, Viennot [13] et Viennot [40]). Ces nombres jouent pour les nombres de Genocchi, un peu le même rôle que les sécants pour les nombres tangents. Le développement en fraction continuées de leur série génératrice est

$$(21) \quad \sum_{n \geq 0} GM_{2n+1} t^{2n} = \frac{1}{1 - \frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t^2}{2}} \cdot \dots$$

On pourrait trouver une bijection directe entre une certaine classe d'involutions sans point fixe, en bijection avec les permutations, et les histoires associées à la valuation  $a_k = 1$ ,  $b_k = 0$ ,  $c_k = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ . Ainsi le moment  $\mu_{2n}$  pour la 10ième ligne est  $n!$  dans le cas  $\beta = \mu + \frac{1}{2} = 1$ . Dans le cas général, on obtient le moment des polynômes d'Hermite généralisés  $\hat{H}_n^\beta(x)$  comme le polynôme en  $\beta$  énumérant ces involutions sans point fixe selon un certain paramètre analogue au paramètre nombre d'éléments saillants pour les permutations.

Enfin la 11ième ligne de la table 1 donne les moments des polynômes de Legendre. Une preuve bijective resterait à trouver. Celle-ci revient à démontrer l'égalité

$$(22) \quad \frac{1}{2n+1} w(\alpha) = \sum_{|\omega|=2n} w(\omega),$$

où la sommation est parmi les chemins de Dyck  $\omega$  de longueur de  $2n$ . On désigne par  $\alpha$  le diagramme formé de tous les pas possibles des chemins de Dyck. La valuation

$w(\alpha)$  est le produit des valuations des arêtes, chaque arête allant du niveau  $k$  au niveau  $k-1$  ou  $k+1$ , étant valuée  $2k+1$ . La valuation la plus élevée est  $2n+1$  et  $\frac{1}{2n+1} w(\alpha)$  est le produit des valuations des arêtes autre que l'unique arête (Sud-Est) valuée  $2n+1$ .

Maintenant  $w(\omega)$  désigne le produit des valuations des arêtes de  $\alpha$  non situées sur  $\omega$ , par la valuation  $v(\omega)$  relative à  $b_k = 0, \lambda_k = k^2$ , (relative aux polynômes de Meixner de 2ème espèce  $M_n(x; 0, 1)$ ).

Par exemple la figure 4 montre le cas  $n = 2$ .

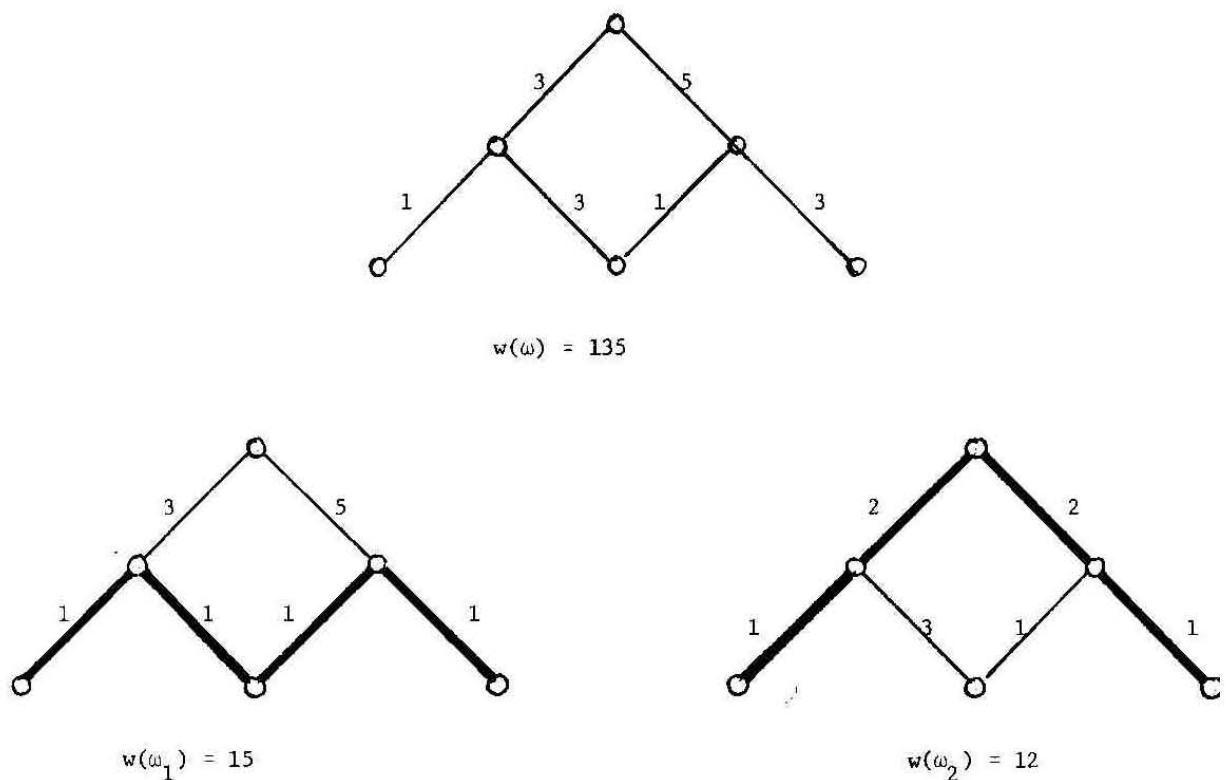


Figure 4 Moments des polynômes de Legendre (pour  $n = 2$ ).

§3. Convergents

Nous reprenons la suite logique du §1 et énonçons.

Proposition 2. Soient  $\{b_i\}_{i \geq 0}$  et  $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$  deux suites de l'anneau  $\mathbb{K}$ , et soit  $\{P_n(t)\}_{n \geq 0}$  la suite de polynômes unitaires associés par la récurrence linéaire (I-7), (I-8). Nous notons  $\{\delta P_n(t)\}_{n \geq 0}$  la suite de polynômes obtenus en remplaçant dans la récurrence linéaire  $b_i$  par  $b_{i+1}$  et  $\lambda_i$  par  $\lambda_{i+1}$  pour tout  $i \geq 0$ .

Pour tout  $k \geq 0$ , le convergent  $J_k(t)$  de la J-fraction (7) est égal à

$$(23) \quad J_k(t) = \frac{\delta P_k^*(t)}{P_{k+1}^*(t)},$$

dans lequel le symbole \* désigne l'opération "polynôme réciproque"  $P_n^*(t) = t^n P(1/t)$ .

Preuve de la proposition 2.

D'après (6), l'égalité (23) est équivalente à l'égalité suivante

$$(24) \quad \sum_{(\alpha, \omega)} v(\alpha)v(\omega)t^{|\alpha|+|\omega|} = \sum_{\beta} v(\beta)t^{|\beta|},$$

dans laquelle la sommation des membres gauche est parmi les couples  $(\alpha, \omega) \in E_k$  avec  $\alpha$  pavage du segment  $[0, k]$ ,  $\omega$  chemin de Motzkin borné par le niveau  $k$ . La sommation du membre de droite est parmi les pavages de  $[0, k]$  tel que 0 est point isolé. Enfin la notation  $|\alpha|$  désigne pour un pavage  $\alpha$  le nombre de points non isolés, c'est-à-dire le nombre de monominos augmenté de deux fois le nombre de dominos.



Soit  $F_k \subseteq E_k$  l'ensemble des couples  $(\alpha, \omega)$  avec  $\omega$  le chemin vide (réduit à  $(0,0)$ ) et  $\alpha$  pavage de  $[0,k]$  ayant 0 comme point isolé.

Pour démontrer (24), il suffit de construire une involution  $\phi: E_k/F_k \rightarrow E_k/F_k$  telle que

$$(25) \quad (\alpha', \omega') = \phi(\alpha, \omega) \quad \text{avec} \quad v(\alpha')v(\omega') = -v(\alpha)v(\omega)$$

$$\text{et} \quad |\alpha'| + |\omega'| = |\alpha| + |\omega|.$$

Exactement comme pour la preuve bijective de l'orthogonalité (proposition I-17) et de celle identifiant les polynômes inverses aux polynômes verticaux (proposition III-1), nous introduisons les deux indices  $h(\alpha)$  et  $h(\omega)$ . Ce dernier ne peut être infini que si  $\omega$  est vide. Selon que  $h(\alpha)-1 \leq h(\omega)$  (resp.  $h(\alpha)-1 > h(\omega)$ ), on "transporte" alors un monomino ou domino du pavage  $\alpha$  vers le chemin  $\omega$  (qui devient alors un pas Est ou un "chevron") (resp. du chemin  $\omega$  vers le pavage  $\alpha$ ). Ces deux cas s'excluent mutuellement et le transport est toujours possible pour  $(\alpha, \omega) \in F_k$ . C.Q.F.D.

Pour  $n, k, r, s \geq 0$ , notons

$$(26) \quad \mu_{n,r,s}^{\leq k} = \sum_{\omega} v(\omega),$$

où la sommation est parmi les chemins de Motzkin de longueur  $n$ , bornés par le niveau  $k$ , et allant du niveau  $r$  au niveau  $s$ . On pourrait généraliser la bijection de la proposition 2 et démontrer les relations

$$(27) \quad \sum_{n \geq 0} \mu_{n,r,s}^{\leq k} t^n = \frac{t^{s-r} P_r^*(t) \delta^{s+1} P_{k-s}^*(t)}{P_{k+1}^*(t)}, \quad \text{pour } r \leq s,$$

$$(27) \quad \sum_{n \geq 0} \mu_{n,r,s}^{\leq k} t^n = (\lambda_r \dots \lambda_{s+1}) \frac{t^{s-r} P_s^*(t) \delta^{r+1} P_{k-s}^*(t)}{P_{k+1}^*(t)}, \quad \text{pour } r \geq s.$$

En particulier pour  $r = s = 0$  on retrouve bien la relation (23). En prenant  $r = 0$  et  $s = k$ , il vient alors

$$(28) \quad \sum_{n \geq 0} \mu_{n,0,k}^{\leq k} t^n = \frac{t^k}{P_{k+1}^*(t)}.$$

Notons  $T_{k+1}$  la matrice tridiagonale

$$(29) \quad T_{k+1} = \begin{pmatrix} b_0 & 1 & & & 0 \\ \lambda_1 & & b_1 & & \\ & & & \lambda_2 & \\ & & & & \lambda_k \\ 0 & & & & & b_k \end{pmatrix}$$

Soit  $I_k$  la  $k \times k$  matrice unité. On a, pour tout  $k \geq 0$ , la relation

$$(30) \quad P_{k+1}^*(t) = \det(I_{k+1} - T_{k+1} t).$$

Cette relation n'est qu'un cas particulier de la relation générale (que l'on pourrait prendre comme définition du déterminant) pour une matrice  $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq k}$

$$(31) \quad \det(I_{k+1} - A) = \sum_{(\gamma_1, \dots, \gamma_r)} (-1)^{r} v(\gamma_1) \dots v(\gamma_r),$$

dans laquelle la sommation est parmi les assemblées de  $r \geq 0$  cycles de  $[0, k]$  deux à deux disjoints, la valuation  $v(\gamma)$  d'un cycle  $\gamma$  étant la valuation du chemin obtenu en parcourant le cycle à partir de n'importe lequel de ses points, l'arête allant de  $i$  à  $j$  est valuée  $a_{ij}$ . (Ici "cycle" réfère aux cycles d'une permutation, en théorie des graphes ceux-ci seraient appelés circuits élémentaires).

Lorsque la matrice  $A$  est tridiagonale, les cycles ne peuvent être que de longueur 1 et 2. De plus dans ce dernier cas, le cycle doit être sur deux points consécutifs  $0 \leq i < i+1 \leq k$ . Ainsi les cycles de longueur 1 et 2 correspondent respectivement aux monominos et dominos. La valuation de (30) avec  $A = T_{k+1}^t$  est la même que celle des pavages  $\alpha$  de  $[0, k]$ , sauf que l'on a multiplié par un poids  $t$  (resp.  $t^2$ ) pour les monominos (resp. dominos).

La preuve bijective des relations (23) et (27), (27') n'est pas autre chose qu'un cas particulier d'une preuve bijective de la relation classique d'inversion de la matrice  $A$  (ou plutôt ici  $I-A$ , en notant  $I = I_{k+1}$ ).

$$(32) \quad (I-A)_{rs}^{-1} = \frac{(-1)^{r+s} \text{cof}_{sr}(I-A)}{\text{dét}(I-A)},$$

le numérateur désigne le classique cofacteur, qui est en fait interprété par

$$(33) \quad (-1)^{r+s} \text{cof}_{sr}(I-A) = \sum_{(\omega; \gamma_1, \dots, \gamma_r)} (-1)^r v(\omega) v(\gamma_1) \dots v(\gamma_r),$$

avec des valuations et une sommation identique à celle de (31), et la condition supplémentaire que  $\omega$  est un chemin de  $[0, k]$  allant de  $r$  à  $s$ , ne se recoupant pas

avec lui-même, et disjoint des cycles  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ . Si  $r = s$ ,  $\omega$  est vide et réduit à ce point.

On peut vérifier que dans le cas  $A = T_{k+1}t$ , l'expression (33) devient le numérateur de (27) ou (27'), ou celui de (23) si  $r = s = 0$ .

D'autre part le terme  $(r,s)$  de la matrice

$$(34) \quad (I - T_{k+1}t)^{-1} = \sum_{n \geq 0} T_{k+1}^n t^n ,$$

n'est pas autre chose que la série génératrice des  $\mu_{n,r,s}^{\leq k}$  formant le nombre de gauche de (27). Remarquons que les chemins de Motzkin bornés par le niveau  $k$  ne sont qu'une représentation visuelle commode ("déploiement dans le temps") des chemins du segment  $[0,k]$  allant au plus proche voisin ou restant sur place, c'est-à-dire que chaque pas élémentaire  $(i,j)$  est tel que  $|i-j| \leq 1$ .

On trouvera une preuve bijective de (32) dans Dulucq-Viennot [12], redonnant celle de la proposition 2 dans le cas  $A = T_{k+1}t$ , et simplifiant celle de Foata [17] dans le cas général. On verra également dans [12] que (28) n'est pas autre chose qu'une forme déguisée du célèbre "théorème maître de MacMahon" pour la matrice  $A = T_{k+1}$ .

Nous revenons au fait de ce paragraphe, c'est-à-dire juste après la relation (28).

Soient deux entiers  $0 \leq \ell < k$ . Les chemins de Motzkin  $\omega$  allant du niveau 0 au niveau 0, bornés par le niveau  $k$  et dépassant (strictement) le niveau  $\ell$ , ont évidemment une factorisation unique sous la forme

$$(35) \quad \omega = \omega_1 \text{ u } \omega_2 ,$$

avec  $\omega_1$  chemin allant du niveau 0 au niveau  $\ell$  et borné par le niveau  $\ell$ ,  $u$  est un pas Nord-Est (du niveau  $\ell$  au niveau  $\ell + 1$ ), et  $\omega_2$  est un chemin de Motzkin borné par le niveau  $k$  et allant du niveau  $\ell + 1$  au niveau 0. D'après (23), (27') et (28) on déduit

$$(36) \quad \frac{\delta P_k^*(t)}{P_{k+1}^*(t)} - \frac{\delta P_k^*(t)}{P_{\ell+1}^*(t)} = \frac{(\lambda_1 \dots \lambda_{\ell+1}) t^{2\ell+2} \delta^{\ell+2} P_{k-\ell-1}^*(t)}{P_{\ell+1}^*(t) P_{k-1}^*(t)}$$

Ainsi on déduit

$$(37) \quad \delta P_k^*(t) P_{\ell+1}^*(t) - \delta P_{\ell}^*(t) P_{k+1}^*(t) = (\lambda_1 \dots \lambda_{\ell+1}) t^{2\ell+2} \delta^{\ell+2} P_{k-\ell-1}^*(t).$$

Le cas particulier  $\ell = k - 1$  donne la classique identité (dans la théorie des fractions continues)

$$(38) \quad \delta P_k^*(t) P_k^*(t) - \delta P_{k-1}^*(t) P_{k+1}^*(t) = \lambda_1 \dots \lambda_k t^{2k}$$

Une autre identité faisant intervenir les numérateurs et dénominateurs des convergents des J-fractions est la suivante. Notons  $f_k(t)$  la série génératrice des valuations des chemins allant du niveau 0 au niveau  $k$ ,

$$(39) \quad f_k(t) = \sum_{n \geq k} \mu_{n,k} t^n,$$

avec  $\mu_{n,k}$  le coefficient du polynôme vertical  $V_n(t)$  du chapitre III.

On peut alors écrire

$$(40) \quad f_k(t) = \frac{1}{\lambda_1 \dots \lambda_k t^k} [P_k^*(t) f(t) - \delta P_{k-1}^*(t)],$$

dans lequel  $f(t) = f_0(t)$  est la J-fraction (7).

Cette identité est en faite "presque" l'identité (I-16) pour  $l = 0$ . Elle découle directement de la bijection prouvant la proposition I-17. Il suffit simplement de considérer l'entier  $n$  variable et de changer la valuation des pavages  $\alpha$  de  $[0, k-1]$  pondérant chaque point isolé par  $t$ , en la valuation "complémentaire" où le poids d'un monomino (resp. domino) est  $-b_i t$  (resp.  $-\lambda_i t^2$ ).

On obtient alors

$$(41) \quad P_k^*(t) f(t) = \sum_{(\alpha, \omega)} v(\alpha) v(\omega) t^{|\alpha| + |\omega|}$$

où la sommation est parmi les paires  $(\alpha, \omega)$  telles que, soit  $\alpha$  est vide et  $\omega$  est un chemin de Motzkin allant du niveau 0 au niveau 0 tel que ses  $(k+1)$  premiers pas sont des pas Nord-Est, soit  $\omega$  est vide et  $\alpha$  est un pavage de  $[0, k-1]$  tel que 0 est point isolé. La relation (40) découle immédiatement de (41).

Nous terminons ce paragraphe par une allusion à la théorie des approximants de Padé. Soit  $f(t) = \sum_{n \geq 0} \mu_n t^n$  une série formelle. Soit  $p$  et  $q$  entiers  $\geq 0$ . On cherche les "approximations rationnelles" de  $f(t)$ , c'est-à-dire les fractions rationnelles  $\frac{N(t)}{D(t)} = R(t)$  telles que le degré de  $N(t)$  et  $D(t)$  soient respectivement  $p$  et  $q$  et tels que la série  $f(t) - R(t)$  ait une valuation  $m$  (degré du terme de plus bas degré) la plus grande possible.

$N(t)$  et  $D(t)$  sont dit approximants de Padé de type  $(p, q)$  lorsque  $m \geq p + q + 1$ . Un théorème classique de Frobenius affirme que de tels approximants existent toujours pour tout  $p, q \geq 0$ .

L'identité (27) pour  $r = 0$ , devient

$$(42) \quad \sum_{n \geq 0} \mu_{n, 0, s}^{\leq k} t^n = \frac{t^s \delta^{s+1} P_{k-s}^*(t)}{P_{k+1}^*(t)}$$

Le membre de gauche  $f_s^{\leq k}(t)$  de (42) et la série  $f_s(t)$  définie par (39) sont divisibles par  $t^s$ . Notons  $f_s^{\leq k}(t) = t^s g_s^{\leq k}(t)$  et  $f_s(t) = t^s g_s(t)$ . D'après la géométrie des chemins, il est clair que les séries  $g_s(t)$  et  $g_s^{\leq k}(t)$  ont mêmes termes de degré  $\leq 2k - s + 1$ .

D'autre part  $\delta^{s+1} P_{k-s}^*(t)$  est de degré  $k-s$  et  $P_{k+1}^*(t)$  de degré  $k+1$ . Ainsi  $\delta^{s+1} P_{k-s}^*(t)$  et  $P_{k+1}^*(t)$  sont des approximants de Padé de type  $(k-s, k+1)$  de la fonction  $g_s(t)$ .

En particulier lorsque  $s = 0$ , les numérateurs et dénominateurs des convergents  $J_k$  de la  $J$ -fraction (7) sont des approximants de Padé de type  $(k, k+1)$ .

§4. Applications aux identités de Rogers-Ramanujan

Les célèbres identités de Rogers-Ramanujan (qu'il faudrait plutôt faire suivre de nom de Schur), sont les suivantes :

$$(43) \quad \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2}}{(1-q) \dots (1-q^n)} = \prod_{n \equiv 1,4[5]} \frac{1}{(1-q^n)},$$

$$(44) \quad \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2+n}}{(1-q) \dots (1-q^n)} = \prod_{n \equiv 2,3[5]} \frac{1}{(1-q^n)},$$

dans lesquelles les produits infinis sont parmi les nombres congrus à, respectivement 1,4 et 2,3 modulo 5.

Notons  $RR_I(q)$  et  $RR_{II}(q)$  les membres gauches respectivement des identités (43) et (44).

Une partition de l'entier  $n$  est une suite décroissante (au sens large)  $d = (d_1 \geq \dots \geq d_p)$  telle que  $n = d_1 + \dots + d_p$ . Les entiers  $d_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , sont les parts de la partition. Appelons D-partition une partition telle que la différence entre deux parts successives vérifie  $d_i - d_{i+1} \geq 2$ . Il est très classique que la  $q$ -série  $RR_I(q)$  (resp.  $RR_{II}(q)$ ) est la série génératrice des D-partitions (resp. D-partitions sans part égale à 1).

Soit  $\alpha$  un pavage par des dominos (en nombre fini) de la demi-droite  $D = \{0,1,2,\dots\}$ . Chaque domino  $\{k,k+1\}$ ,  $k \geq 0$ , est valué  $q^{k+1}$ . Il est clair que chaque pavage  $\alpha$  de valuation  $q^n = v(\alpha)$  est en bijection avec une D-partition de  $n$ : il suffit de faire correspondre une part  $d_i = k + 1$  à chaque domino  $\{k,k+1\}$ .



D'autre part, soit  $\{R_n(x, q)\}_{n \geq 0}$  la suite de polynômes orthogonaux (à variable  $x$  et coefficients dans  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[q]$ ) définie par les coefficients  $b_k = 0$  et  $\lambda_k = -q^k$ .

Il est clair que l'on a les deux relations

$$(45) \quad RR_I(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n^*(1, q) \quad ,$$

$$(46) \quad RR_{II}(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta R_n^*(1, q) \quad .$$

Remarquons que l'on aurait pu aussi remplacer dans ces deux identités la polynôme réciproque  $R_n^*$  par  $R_n$ , mais le choix de  $R_n^*$  montre mieux l'analogie avec ce qui précède dans ce chapitre. D'autre part le polynôme  $R_{n+1}^*(t, q)$  énumère les D-partitions dont les parts sont bornées par  $n$ , selon le nombre de parts.

L'analogie des identités (23) et (28) sont alors respectivement

$$(47) \quad \sum_{\omega} v(\omega) = \frac{RR_{II}(q)}{RR_I(q)} \quad ,$$

où la sommation est parmi tous les chemins de Dyck  $\omega$  valués par  $\lambda_k = -q^k$ , et

$$(48) \quad \sum_{\omega} v(\omega) = \frac{1}{RR_I(q)} ,$$

où la sommation est parmi les chemins de Dyck partant du niveau 0, arrivant à un niveau quelconque, et finissant par un pas Sud-Est.

Ces identités peuvent être obtenues en faisant un passage à la limite après avoir fait  $t=1$  dans (23) et (28), ou encore en faisant une preuve bijective généralisant (légèrement) celle de la proposition 2.

Remarquons que  $RR_{II}$  joue le rôle d'un cofacteur,  $RR_I$  celui d'un déterminant. La relation (48) est à nouveau une forme déguisée du "théorème maître" de MacMahon pour une matrice tridiagonale (infinie).

Maintenant, à tout chemin de Dyck  $\omega$  interprétant (48) on associe la suite des hauteurs des pas Sud-Est obtenue en suivant  $\omega$ . Cette suite  $h_1, \dots, h_p$  vérifie

$$(49) \quad h_{i+1} \geq h_i - 1, \quad 1 \leq i < p .$$

Réciproquement à toute suite d'entiers  $h_i \geq 1$  vérifiant (49), on associe un chemin de Dyck. Cette bijection est une variante de la bijection entre chemins de Lukasiewicz de longueur  $n$  et chemins de Dyck de longueur  $2n$  (nous avons montré au chapitre III, §5 que le nombre de chemins de Lukasiewicz de longueur  $n$  est le nombre de Catalan  $C_n$ ).

Appelons quasi-partition de l'entier  $n$  une suite  $h=(h_1, \dots, h_p)$  d'entiers  $h_i \geq 1$  vérifiant (49) et telle que  $n = h_1 + \dots + h_p$ . On peut alors énoncer d'après (48)

$$(50) \quad \frac{1}{RR_I(q)} = \sum_h (-1)^{p(h)} q^{n(h)} ,$$

dans lequel la sommation est parmi les quasi-partitions  $h=(h_1, \dots, h_p)$ ,  $p=p(h)$  et  $n(h)=h_1+\dots+h_p$ .

D'autre part, appliquant la proposition 1 et la relation (47), on obtient la célèbre fraction continue de Ramanujan

$$(51) \quad \frac{1}{1 + \frac{q}{1 + \frac{q^2}{1 + \frac{q^3}{\dots}}}}} = \frac{RR_{II}(q)}{RR_I(q)} .$$

En appliquant les deux identités de Rogers-Ramanujan on peut alors écrire

$$(52) \quad \frac{1}{1 + \frac{q}{1 + \frac{q^2}{1 + \frac{q^3}{\dots}}}}} = \frac{\prod_{n \equiv 1, 4[5]} (1-q^n)}{\prod_{n \equiv 2, 3[5]} (1-q^n)} .$$

§5. Tassements et moments symétriques

Définition 3. Une fonctionnelle  $\phi: \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}$  définie par ses moments  $\phi(x^n) = \mu_n$  est dite symétrique ssi les moments  $\mu_{2n+1}$  d'ordre impair sont nuls.

Il en est ainsi des moments des polynômes de Tchebycheff (1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> espèce), Hermite et Legendre.

Il est aisé de démontrer directement la

Proposition 4. Soit  $\{S_n(x)\}_{n \geq 0}$  des polynômes orthogonaux unitaires pour la fonctionnelle de moments  $\phi$ . Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes

- (i)  $\phi$  est symétrique,
- (ii)  $S_n(-x) = (-1)^n S_n(x)$  pour tout  $n \geq 0$ ,
- (iii)  $b_k = 0$  pour tout  $k \geq 0$  (voir I-7).

Avec les notations de la proposition 4, on peut donc définir deux suites de polynômes unitaires  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  et  $\{Q_n(x)\}_{n \geq 0}$  par

$$(53) \quad S_{2n}(x) = P_n(x^2), \quad S_{2n+1}(x) = xQ_n(x^2).$$

Inversement cette relation définit les polynômes  $S_n(x)$ ,  $n \geq 0$  à partir des  $P_n(x)$  et  $Q_n(x)$ ,  $n \geq 0$ .

A toute fonctionnelle symétrique  $\phi$ , on peut associer une fonctionnelle  $\psi$ , et réciproquement définir  $\phi$  à partir de  $\psi$ , par la relation

$$(54) \quad \begin{aligned} \phi(x^{2n}) &= \mu_{2n} = \nu_n = \psi(x^n), \\ \phi(x^{2n+1}) &= \mu_{2n+1} = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, notons  $\psi^+$  la fonctionnelle

$$(55) \quad \psi^+(x^n) = v_{n+1} = \psi(x^{n+1}) \quad \text{pour } n \geq 0.$$

On pourrait alors sans difficulté déduire des définitions

Proposition 5. Soient  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ ,  $\{Q_n(x)\}_{n \geq 0}$ ,  $\{S_n(x)\}_{n \geq 0}$  trois suites de polynômes liées par (53) et  $\phi, \psi$  deux fonctionnelles de moments liées par (54). Alors  $\{S_n(x)\}_{n \geq 0}$  est la suite de polynômes orthogonaux unitaires pour  $\phi$  ssi  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  et  $\{Q_n(x)\}_{n \geq 0}$  sont respectivement les suites de polynômes orthogonaux unitaires relatives aux fonctionnelles  $\psi$  et  $\psi^+$  définie par (55).

Remarquons que  $\psi^+$  ne vérifie pas forcément la convention habituelle de ce mémoire  $\psi^+(1) = 1$ .

Les polynômes  $Q_n(x)$ ,  $n \geq 0$ , orthogonaux pour  $\psi^+$  sont en fait déterminés par les  $P_n(x)$ ,  $n \geq 0$ . Nous noterons aussi  $Q_n(x) = P_n^+(x)$  (à ne pas confondre avec  $\delta P_n(x)$ ). Plus généralement, on rencontre dans la littérature les polynômes  $P_n^+(x; c)$  définis comme étant orthogonaux aux moments  $v_n' = v_{n+1} - cv_n$ . Ce sont les "kernel polynomials" de Chihara [7]. Ici  $P_n^+(x; 0) = P_n^+(x)$ .

Le problème traité dans ce paragraphe est d'interpréter combinatoirement avec les chemins de Motzkin les relations (53) et (54). Or cette interprétation est très simple: il suffit de transformer un chemin de Dyck valué  $\omega = (s_0, \dots, s_{2n})$  en un chemin de Motzkin valué  $\eta$  en parcourant de "deux en deux" le chemin  $\omega$ , à partir soit de  $s_0$ , soit de  $s_1$ . Ces deux opérations sont appelées tassement.

Soit donc  $\omega = (s_0, \dots, s_{2n})$  un chemin de Dyck de longueur  $2n$  valué (comme d'habitude)  $v(\omega)$  par les coefficients  $\gamma_k, k \geq 0$ . Pour tout  $i, 0 \leq i \leq n$ , le sommet  $s_{2i}$  est à un niveau pair, soit  $s_{2i} = (2y_i, 2i)$ . On peut donc définir le chemin (de Motzkin)  $\eta = T(\omega)$  par la relation

$$(56) \quad T(\omega) = (t_0, \dots, t_n) \text{ avec } t_i = (y_i, i) \text{ pour } 0 \leq i \leq n.$$

Ceci revient à dire que chaque paire de pas  $\xi_i = [(s_{2i}, s_{2i+1}), (s_{2i+1}, s_{2i+2})]$  du chemin de Dyck  $\omega$  est remplacé par un pas  $(t_i, t_{i+1})$  de  $T(\omega)$ . Ce dernier est Nord-Est (NE), Est (E), Sud-Est (SE) selon que la paire  $\xi_i$  est respectivement [NE, NE], [NE, SE] ou [SE, NE], [SE, SE].

On "transporte" trivialement les valuations des pas élémentaires de  $\omega$  sur le chemin  $T(\omega)$  en définissant  $w(t_i, t_{i+1})$  comme la somme des valuations des paires  $\xi_i$  associées à  $(t_i, t_{i+1})$  (voir figure 5). Il y a deux paires possibles si  $(t_i, t_{i+1})$  est un pas Est, une seule paire dans les autres cas. Ainsi  $v(\omega) = w(T(\omega))$ , dans lequel  $w$  réfère à la valuation définie par

$$(57) \quad \begin{aligned} b_0 &= \gamma_1 \quad \text{et} \quad b_k = \gamma_{2k} + \gamma_{2k+1}, \\ \lambda_k &= \gamma_{2k} \gamma_{2k-1}, \quad \text{pour } k \geq 1. \end{aligned}$$

Soient  $\phi$  et  $\psi$  les fonctionnelles linéaires associées respectivement à  $\{\gamma_k\}_{k \geq 1}$  et  $\{b_k\}_{k \geq 0}, \{\lambda_k\}_{k \geq 1}$  définies par (57), c'est-à-dire celles dont les moments sont la somme des valuations  $v(\omega)$  des chemins de Dyck de longueur  $2n$  et  $w(\eta)$  des chemins de Motzkin de longueur  $n$ . Il est clair que  $\phi$  et  $\psi$  sont reliées par (54)

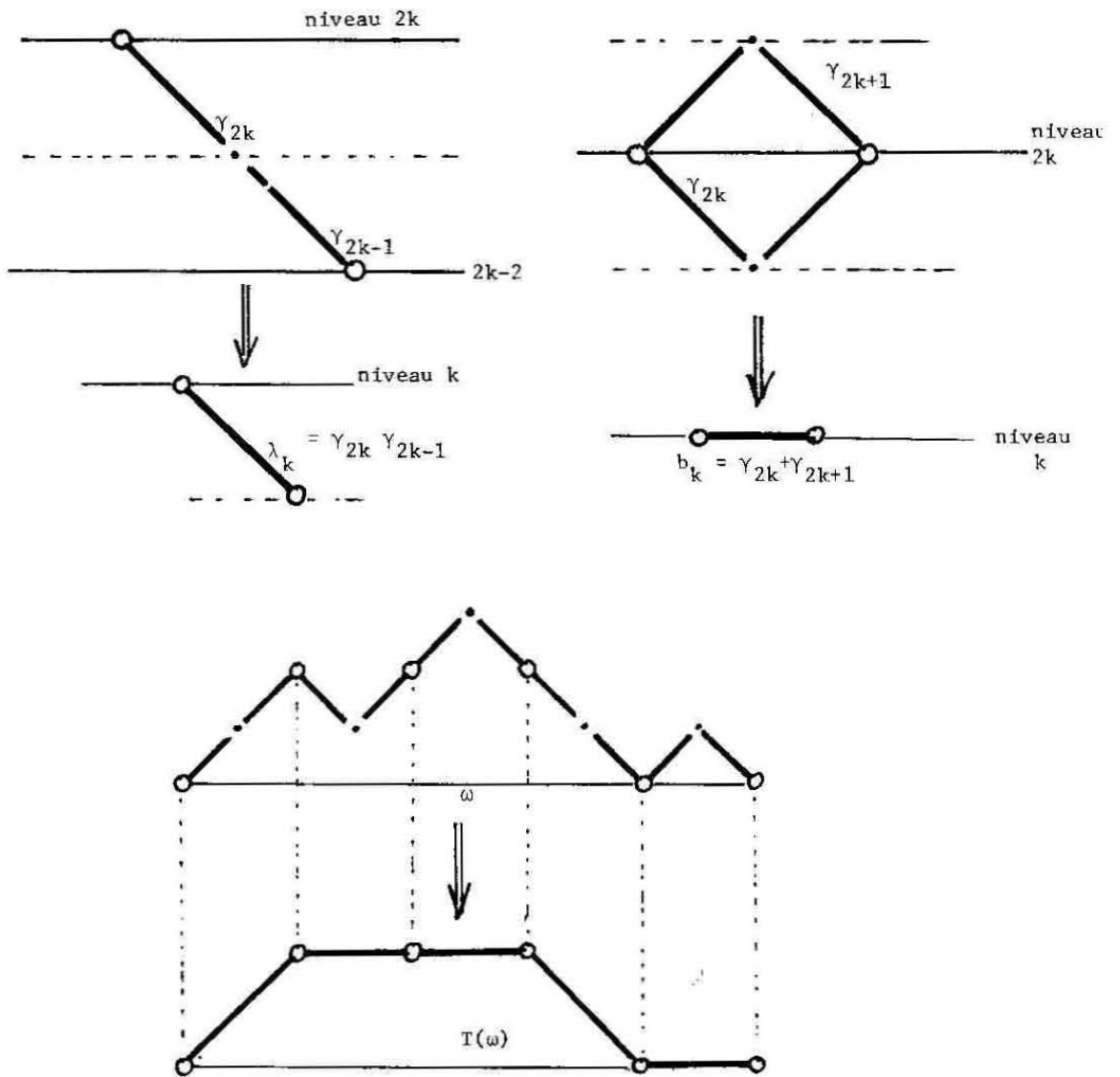


Figure 5. Le tassement  $T(\omega)$ .

D'une manière analogue (voir figure 6) on définit le tassement  $\eta = T^+(\omega)$ . Le sommet  $s_{2i+1}$  du chemin de Dyck  $\omega$  est à un niveau impair  $2y_i+1$ . Alors  $T^+(\omega)$  est le chemin de Motzkin défini par

$$(58) \quad T^+(\omega) = (t_0, \dots, t_{n-1}) \text{ avec } t_i = (y_i, i), \text{ pour } 0 \leq i \leq n.$$

La valuation  $v(\omega)$  se "transporte" en la valuation  $w^+(\eta)$  (de chemin de Motzkin) définie par

$$(59) \quad \begin{aligned} b_k^+ &= \gamma_{2k+1} + \gamma_{2k+2} \quad \text{pour } k \geq 0, \\ \lambda_k^+ &= \gamma_{2k+1} - \gamma_{2k} \quad \text{pour } k \geq 1 \end{aligned}$$

Il est clair que  $w^+(T^+(\omega)) = \gamma_1 v(\omega)$ . Ainsi la fonctionnelle dont le moment d'ordre  $n$  est  $\gamma_1 \sum_{\eta} w^+(\eta)$  (somme sur les chemins de Motzkin de longueur  $n$ ) n'est pas autre chose que  $\psi^+$  définie par (54) et (55).



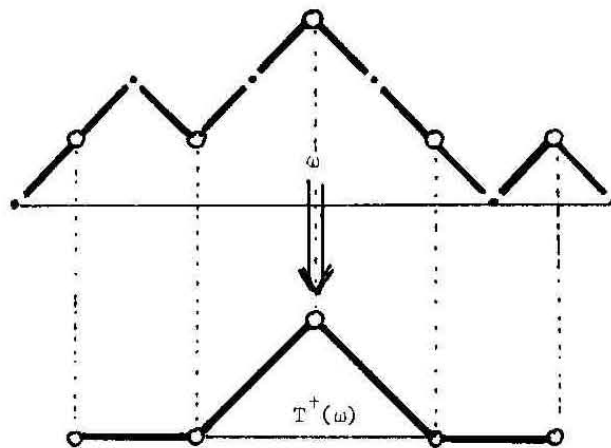
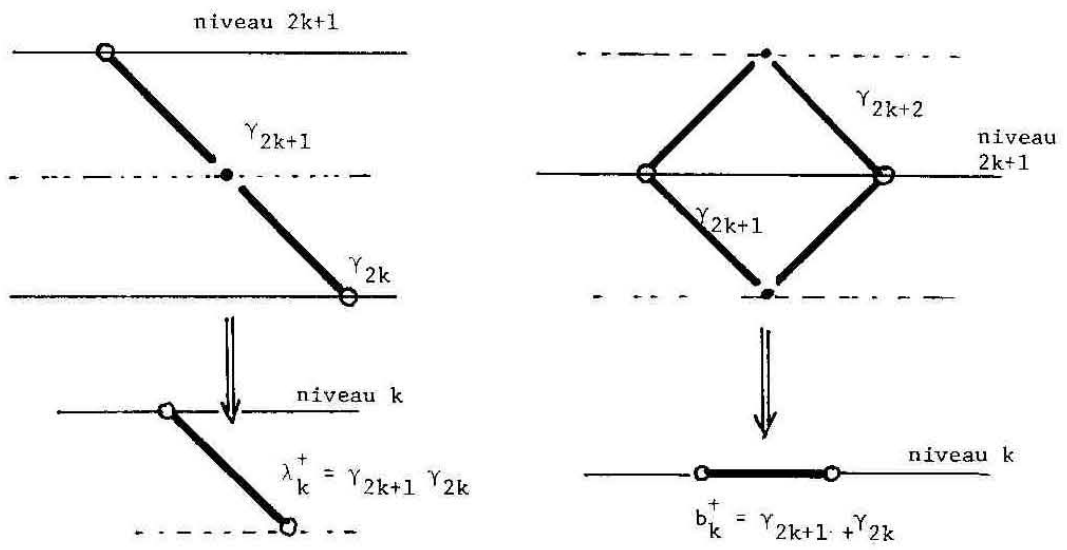


Figure 6. Le tassement  $T^+(\omega)$ .

En conclusion nous énonçons

Proposition 6. Avec les notations de la proposition 5, la suite  $\{\gamma_k\}_{k \geq 1}$  (resp. les suites  $\{b_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ , resp.  $\{b_k^+\}_{k \geq 0}$ ,  $\{\lambda_k^+\}_{k \geq 1}$ ) associées par la récurrence linéaire (I-9) aux polynômes  $\{S_n(x)\}_{n \geq 0}$  (resp.  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ , resp.  $\{Q_n(x)\}_{n \geq 0}$ ) sont liées par les relations (57) et (59).

Exemple 7. Soit  $\{F_n(x)\}_{n \geq 0}$  la suite de polynômes de Fibonacci  $F_n(x) = U_n(x/2)$  définie (voir chapitre II, §1) par les coefficients  $b_k=0$ ,  $k \geq 0$  et  $\lambda_k=1$ ,  $k \geq 1$ . Les polynômes associés  $P_n(x)$  et  $Q_n(x) = P_n^+(x)$  sont définis respectivement par les coefficients:  $b_k=2$  sauf  $b_0=1$ ,  $\lambda_k=1$  et  $b_k=2$ ,  $\lambda_k=1$ . Ainsi les polynômes  $P_n^+(x)$ ,  $n \geq 0$  sont les polynômes orthogonaux associés à la première ligne de la table 1 du §2.

Remarquons que l'application tassement  $\omega \mapsto T^+(\omega)$  peut être considérée comme une bijection entre les chemins de Dyck de longueur  $2n$  et les chemins de Motzkin colorés (voir chapitre II) de longueur  $n-1$ . Les deux couleurs (bleu ou rouge) sur les pas Est correspondent aux deux paires  $\xi = [SE, NE]$  considérées pour construire  $T^+(\omega)$ .

De même  $T(\omega)$  correspond à une bijection entre les chemins de Dyck de longueur  $2n$  et les chemins de Motzkin colorés de longueur  $n$  ayant la restriction de ne pas avoir de pas Est rouge au niveau 0.

Exemple 8. D'après le chapitre II, §5, les polynômes de Laguerre  $L_n^\alpha(x)$  satisfont les relations

$$(60) \quad L_n^{(\alpha)+}(x) = L_n^{(\alpha+1)}(x) \quad (n \geq 0).$$

On peut donc définir les polynômes  $S_n(x)$  associés à (53) par la relation

$$(61) \quad S_{2n}^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x^2), \quad S_{2n+1}^{(\alpha)}(x) = x L_n^{(\alpha+1)}(x^2).$$

Ces polynômes sont définis par les coefficients

$$(62) \quad b_k = 0, \quad \gamma_{2k} = \alpha^2 k \quad (k \geq 1), \quad \gamma_{2k+1} = k \quad (k \geq 1).$$

Pour  $\alpha = -\frac{1}{2}$  on retrouve les polynômes d'Hermite  $H_n(x)$ . Le cas général donne les polynômes d'Hermite généralisés

$$(63) \quad H_n^{(\mu)}(x) = 2^n S_n^{(\alpha)}(x), \quad \mu = \alpha + \frac{1}{2},$$

dont les polynômes unitaires associées  $\hat{H}_n^{(\mu)}(x) = \frac{1}{2^n} H_n^{(\mu)}(x)$  sont relatifs à la ligne (10) de la table 1 du §2.

Maintenant, il est immédiat de retraduire la proposition 6 en termes de fractions continuées.

Soit  $S(t)$  la S- fraction

$$(64) \quad S(t) = \frac{1}{1 - \frac{\gamma_1 t}{1 - \frac{\gamma_2 t}{\dots}}}$$

et  $J(t)$  (resp.  $J^+(t)$ ) la J- fraction (7) avec coefficients  $\{b_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{\lambda_k\}_{k \geq 0}$  définis par (57) (resp. (59)). On peut alors écrire les égalités

$$(65) \quad S(t) = J(t) \quad \text{et} \quad S(t) = 1 + \gamma_1 t J^+(t) .$$

Ces deux égalités proviennent de "contractions" (ou tassements) dans la fraction continuée  $S(t)$ . De manière similaire aux chemins, les niveaux de la fraction continuée sont "groupés" deux à deux, en commençant par les deux premiers pour  $J(t)$  et les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> pour  $J^+(t)$ .

§6. Fractions multicontinuées

Il est aisé de généraliser les §1 et 3 aux chemins de Lukasiewicz valués introduits au chapitre III, §5.

Soit donc  $\Lambda = (\lambda_{k,\ell})_{0 \leq \ell \leq k}$  une matrice triangulaire de coefficients de  $\mathbb{K}$ , définissant la suite de polynômes unitaires  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  par la récurrence (III-19), et une valuation  $v(\omega)$  des chemins de Lukasiewicz. Notons  $f(t) = \sum_{\omega} v(\omega) t^{|\omega|}$ , où la sommation est parmi les chemins de Lukasiewicz allant du niveau 0 au niveau 0. D'une manière analogue au §1 de ce chapitre les notations  $\delta f$  et  $\{\delta P_n\}_{n \geq 0}$  désignent les quantités analogues à respectivement  $f$  et  $\{P_n\}_{n \geq 0}$ , mais relativement à une matrice  $\delta\Lambda$  définie par

$$(66) \quad \delta\Lambda = (\delta\lambda_{k,\ell})_{0 \leq \ell \leq k} \quad \text{avec} \quad \delta\lambda_{k,\ell} = \lambda_{k+1, \ell+1}.$$

Tout chemin de Lukasiewicz se factorise de manière unique en "chemins de Lukasiewicz premiers" et tout chemin de Lukasiewicz premier  $\omega$  admet une unique factorisation sous la forme

$$(67) \quad \omega = u_1 \omega_1 \dots u_k \omega_k v \quad \text{ou} \quad \omega = v, \quad k \geq 0,$$

dans laquelle  $v$  est un pas allant du niveau  $k \geq 0$  au niveau 0. Si  $k \neq 0$ , pour  $1 \leq i \leq k$ , les  $\omega_i$  sont des chemins de Lukasiewicz éventuellement vides allant du niveau  $i$  au niveau  $i$  sans redescendre en dessous du niveau  $i$ , les  $u_i$  sont des pas Nord-Est allant du niveau  $i-1$  au niveau  $i$  (voir figure 7).

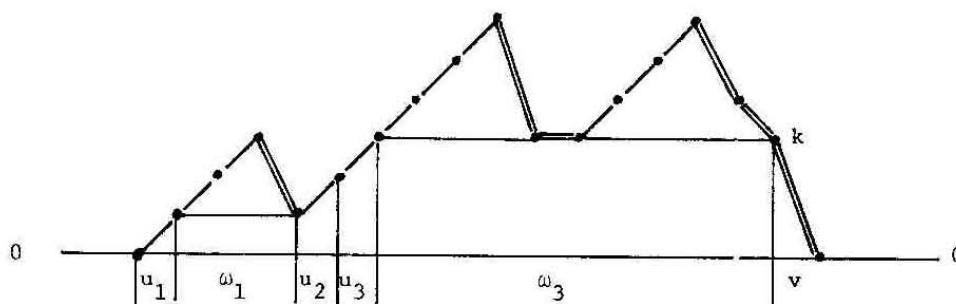


Figure 7. l'unique factorisation d'un chemin de Lukasiewicz premier

On peut alors écrire l'analogie de l'équation fonctionnelle (2) sous la forme

$$(68) \quad f(t) = \frac{1}{1 - \lambda_{0,0}t - \sum_{k \geq 1} \lambda_{k,0} t^{k+1} \delta f(t) \dots \delta^k f(t)}$$

En itérant l'équation, on obtient la notion de fraction multicontinuée de Lukasiewicz, que nous appellerons L-fraction.

En faisant  $\lambda_{i,j} = 0$  pour tout  $i \geq k+1$  et  $j \leq i$ , on obtient alors en itérant (68) une fraction rationnelle  $L_k(t)$  que nous appellerons le convergent (ou réduite). Cette série n'est pas autre chose que l'analogie de (5), série génératrice des sommes de valuation de chemins de Lukasiewicz allant du niveau 0 au niveau 0 et bornés au niveau k. Là encore les réduites convergent vers  $f(t)$  et leur limite est la L-fraction correspondante.

Nous écrivons à titre d'exemple le convergent  $L_2(t)$  de la L-fraction générale

$$(69) \quad L_2(t) = \frac{1}{1 - \lambda_{00}t - \frac{\lambda_{10}t^2}{\left(1 - \lambda_{11}t - \frac{\lambda_{21}t^2}{1 - \lambda_{22}t}\right)} - \frac{\lambda_{20}t^3}{\left(1 - \lambda_{11}t - \frac{\lambda_{21}t^2}{1 - \lambda_{22}t}\right)(1 - \lambda_{22}t)}}$$

On retrouve sous-jacent le convergent  $J_2(t)$  de la J-fraction, avec en plus un terme en  $\lambda_{20}$ .

En remplaçant la matrice tridiagonale  $T_{k+1}$  (29) par la matrice

$$(70) \quad \Lambda_{k+1}^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda_{00} & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & 1 & \\ \lambda_{k,0} & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_{k,k} \end{pmatrix}$$

et en remarquant que

$$(71) \quad P_{k+1}(t) = \det (I_{k+1} - \Lambda_{k+1}^{(1)} t),$$

on obtiendrait des formules analogues aux formules (23), (27), (28), du §3.

En particulier l'analogie de (23) est

$$(72) \quad L_k(t) = \frac{\delta P_k^*(t)}{P_{k+1}^*(t)}.$$

Ainsi toute suite de polynômes unitaires peut être considérée comme les réciproques des dénominateurs des convergents d'une L-fraction.

L'analogie de (27'), (36), (37) serait plus compliqué. Une extension de la bijection prouvant la proposition I-17 pour  $\ell=0$  donnerait un analogue de cette proposition et de la relation (40).

Remarque 9. Soit  $\{d_i\}_{i \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{K}$  et  $\lambda_{k,\ell} = d_{k-\ell}$ . Dans ce cas l'équation (68) est l'équivalent de l'équation classique (non-commutative) du langage de Lukasiewicz L:

$$(73) \quad L = x + xL\alpha_0 + \dots + (xL)^{k+1} \alpha_k + \dots$$

Exemple 10. En reprenant l'exemple 8 du chapitre III, c'est-à-dire  $\lambda_{k,\ell}=1$ , on pourrait écrire un développement en L-fraction de la série génératrice des nombres de Catalan, tel que les dénominateurs des convergents soient les polynômes  $P_n(x) = \sum_{0 \leq i} (-1)^i \binom{n+1-i}{i} x^i$ .



Chapitre VI. Polynôme de pavage d'un graphe.

Le polynôme de couplage  $C(G;x)$  d'un graphe  $G$  est (voir définition ci-dessous) le polynôme énumérateur du nombre de couplages de  $G$  (ensemble d'arêtes deux à deux disjointes). Cette notion est importante en Physique statistique.

Il y a certaines analogies entre les polynômes de couplage et les polynômes orthogonaux. Nous généralisons ces deux notions par celle de polynôme de pavage (voir (9)) d'un graphe valué  $G$ . Lorsque l'on se restreint aux graphes réduits à des segments, on retrouve les polynômes orthogonaux généraux. Lorsque le pavage de  $G$  ne contient pas de monomino et que tous les poids sont réduits à 1, on retrouve les polynômes de couplage .

Nous précisons ces définitions au §1 et montrons que les polynômes de Tchebycheff (1ère et 2ème espèce), d'Hermitte et de Laguerre sont des polynômes de couplage de certains graphes.

Au §2, nous introduisons la notion de fractions continuées arborescentes généralisant celle de fractions continuées. Beaucoup de preuves bijectives relatives aux fractions continuées du chapitre V s'étendent aisément aux fractions arborescentes. Les polynômes de pavage des arbres finis jouent le rôle des polynômes orthogonaux. Nous donnons un exemple: la série génératrice du nombre de cartes planaires (pointées) ayant  $n$  arêtes se développe "agréablement" en fraction continuée arborescente, contrairement à son développement en J-fraction.

Le §3 présente une preuve bijective et une généralisation d'un théorème de Godsil. Ce théorème est basé sur la notion de chemins arborescents d'un graphe, est directement relié aux polynômes de pavage des arbres du §2, et permet de démontrer presque entièrement bijectivement le fait que les zéros des polynômes de couplage sont réels.

Enfin, au §4, nous relient les notions de polynômes de couplage et de dérangements (généralisés). En particulier, nous donnons des preuves bijectives de résultats connus donnant des dérangements comme intégrales de produit de polynômes d'Hermite ou de Laguerre. Nous interprétons aussi des intégrales de produit de polynômes de Tchebycheff.

Sauf mention spéciale, les graphes considérés dans ce chapitre sont supposés non-orientés, sans boucles et arêtes multiples.

§1. Polynôme de couplage et polynôme de pavage.

Soit  $G$  un graphe (non-orienté, sans boucles et arêtes multiples).

Notons  $S$  l'ensemble de ses sommets, et  $A \subseteq P_2(S)$  l'ensemble de ses arêtes.

Un couplage de  $G$  est la donnée d'un ensemble d'arêtes de  $A$  deux à deux disjointes (pas de sommets communs). Pour  $i \geq 0$ , notons  $c(G;i)$  le nombre de couplages de  $G$  ayant  $i$  arêtes. Soit  $n = |S|$  le nombre de sommets de  $G$ . Il s'avère commode d'introduire le polynôme énumérateur des couplages de  $G$  selon le nombre d'arêtes, sous la forme suivante, appelée polynôme de couplage du graphe  $G$  et noté  $C(G;x)$ ,

$$(1) \quad C(G;x) = \sum_{0 \leq i \leq [n/2]} (-1)^i c(G;i) x^{n-2i}.$$

La variable  $x$  comptabilise le nombre de points isolés du couplage (point n'appartenant à aucune arête du couplage).

Remarque 1

Le terme constant de ce polynôme est le nombre de couplages parfaits du graphe  $G$ , c'est-à-dire les couplages sans points isolés (tout sommet est "recouvert" par une arête du couplage). Cette notion est à nouveau très importante en Physique statistique. Le classique modèle d'Ising pour le ferromagnétisme (en dimension 2, avec champ magnétique extérieur nul) est équivalent à calculer le nombre de couplages parfaits d'un certain graphe (réseau) planaire. C'est le "problème des dominos" (ou "dimer problem" en anglais). La planarité permet de résoudre ce problème par le calcul d'un pfaffien, et donc d'un déterminant (d'une matrice antisymétrique). Le modèle d'Ising avec champ magnétique extérieur non nul correspondrait au calcul du polynôme de couplage. C'est le "problème des monominos-dominos"

(ou "monomer-dimer problem"), pour lequel chaque point non recouvert par une arête du couplage est supposé être recouvert par un "monomino".

Une propriété immédiate du polynôme de couplage est la suivante.  
Pour toute arête  $a$  du graphe  $G$ ,

$$(2) \quad C(G;x) = C(G \setminus a;x) - C(G \setminus \setminus a;x),$$

dans lequel  $G \setminus a$  désigne le graphe ayant même sommets que  $G$  mais auquel on a enlevé l'arête  $a$ , et  $G \setminus \setminus a$  désigne le graphe auquel on a enlevé les deux sommets extrémités de  $a$  (et toutes les arêtes touchant ces sommets).

La relation (2) permet de calculer par récursion le polynôme de couplage de  $G$ , en partant de  $C(G;x) = x$  si  $|S| = 1$ . Si  $G \setminus a$  n'est pas connexe ( $a$  est appelé pont) alors on utilisera la relation

$$(3) \quad C(G;x) = \prod_{i=1, \dots, k} C(G_i;x),$$

pour tout graphe  $G$  dont les composantes connexes sont  $G_1, \dots, G_k$ .

On a aussi une relation analogue à (2), mais relative aux sommets. En distinguant selon que le sommet  $s$  appartient ou non à une arête de  $a$ , on a la relation

$$(4) \quad C(G;x) = x C(G \setminus s;x) - \sum_a C(G \setminus \setminus a;x),$$

dans laquelle la sommation est pour toute arête passant par le sommet  $s$ , et  $C(G \setminus s)$  est le graphe obtenu en enlevant  $s$  et toutes les arêtes passant par  $s$ .

Remarquons que pour toute arête  $a = \{s, t\}$  on a  $G \setminus a = (G \setminus s) \setminus t$ .

Exemple 2. Polynômes de Tchebycheff  $U_n(x)$ .

Soit  $\text{Seg}_n$  le graphe formé par le segment  $[n]$  (les arêtes sont les paires  $\{i, i+1\}$ ,  $1 \leq i < n$ ). D'après le §1, chapitre II, il est immédiat que  $C(\text{Seg}_n; x)$  est le polynôme de Fibonacci  $F_n(x) = U_n(x/2)$ , avec  $U_n(x)$  le polynôme de Tchebycheff de deuxième espèce.

Exemple 3. Polynômes de Tchebycheff  $T_n(x)$ .

Soit  $\text{Cyc}_n$  le graphe formé par le cycle de longueur  $n$ , c'est-à-dire  $S = [n]$  et les arêtes sont les paires  $\{i, i+1\}$ ,  $1 \leq i < n$  et la paire  $\{n, 1\}$ . De la relation (2) et de l'exemple 2, on déduit immédiatement que  $C(\text{Cyc}_n; x) = F_n(x) - F_{n-2}(x)$ , pour  $n \geq 2$ . D'après la récurrence satisfaite par  $F_n(x)$ , on déduit que le polynôme  $C(\text{Cyc}_n; x)$  satisfait la récurrence linéaire des polynômes orthogonaux avec  $b_k = 0$  ( $k \geq 0$ ),  $\lambda_k = 1$  ( $k \geq 2$ ) et  $\lambda_1 = 2$ . Ainsi  $C(\text{Cyc}_n; x) = T_n(x/2)$ , avec  $T_n(x)$  le polynôme de Tchebycheff de première espèce.

Exemple 4. Polynômes d'Hermite  $H_n(x)$ .

Soit  $K_n$  le graphe complet ayant  $n$  sommets. En appliquant (à  $n$ 'importe quel sommet) la relation (4), on déduit que la suite de polynômes  $\{C(K_n; x)\}_{n \geq 0}$  satisfait la récurrence linéaire (I-9) avec  $b_k = 0$  ( $k \geq 0$ ) et  $\lambda_k = k$  ( $k \geq 1$ ). Ainsi (voir §6, chapitre II)  $C(K_n; x)$  est le polynôme d'Hermite  $H_n(x)$ . Remarquons que le moment  $\mu_n$  peut être interprété comme le nombre de couplages parfaits de  $K_n$  (terme constant de  $C(K_n; x)$ ).

Exemple 5. Polynômes de Laguerre  $L_n(x)$ .

Soit  $K_{n,n}$  le graphe biparti complet ayant  $2n$  sommets, c'est-à-dire  $S = \langle n \rangle$  avec  $\langle n \rangle = \{\pm 1, \dots, \pm n\}$  et  $A$  est l'ensemble des paires  $\{i, j\}$  avec  $i \in [n]$  et  $j \in [-n] = \{-1, \dots, -n\}$ . Notons  $B_n(x) = C(K_{n,n}; x)$ .

Nous allons montrer que la suite des polynômes  $\{B_n(x)\}_{n \geq 0}$  satisfait la récurrence linéaire suivante

$$(5) \quad B_{n+1}(x) = x^2 B_n(x) - (2n+1)B_n(x) - n^2 B_{n-1}(x).$$

Comme  $B_0(x) = 1$  et  $B_1(x) = x^2 - 1$ , cette relation implique que  $B_n(x) = L_n(x^2)$ , dans lequel  $L_n(x)$  est le polynôme de Laguerre (unitaire) pour  $\alpha = 0$  (voir §5, chapitre II).

Soit donc  $\alpha$  un couplage de  $K_{n+1, n+1}$ . Il y a cinq cas possibles.

- (i)  $(n+1)$  et  $-(n+1)$  sont points isolés,
- (ii) une arête de  $\alpha$  joint  $(n+1)$  et  $-(n+1)$ ,
- (iii) une arête de  $\alpha$  passe par  $-(n+1)$  et  $(n+1)$  est point isolé de  $\alpha$ ,
- (iv) une arête de  $\alpha$  passe par  $(n+1)$  et  $-(n+1)$  est point isolé de  $\alpha$ ,
- (v) deux arêtes (distinctes) de  $\alpha$  passent par les points  $(n+1)$  et  $-(n+1)$ .

Pour  $j = 1, 2, \dots, 5$ , notons  $B_n^{(j)}(x)$  les polynômes analogues à  $B_n(x)$  correspondant à chacun des types de couplages, de sorte que

$$B_n(x) = \sum_{j=1, \dots, 5} B_n^{(j)}(x).$$

Tout couplage  $\alpha$  de  $K_{n+1, n+1}$  du type (i) (resp. (ii)) est obtenu à partir d'un couplage (quelconque)  $\beta$  de  $K_{n, n}$  en rajoutant les deux points

isolés  $(n+1)$  et  $-(n+1)$  (resp. une arête joignant  $(n+1)$  et  $-(n+1)$ ). Ainsi  $B_{n+1}^1(x) = x^2 B_n(x)$  et  $B_{n+1}^2(x) = -B_n(x)$ .

Tout couplage  $\alpha$  de  $K_{n+1,n+1}$  du type (iii) (resp. (iv)) est obtenu en "insérant" (voir figure 1) une arête à un couplage  $\beta$  de  $K_{n,n}$  tel que  $n$  (resp.  $-n$ ) soit point isolé de  $\beta$ . L'insertion peut se faire de  $n$  façons différentes. Dans cette insertion, le point isolé  $n$  (resp.  $-n$ ) de  $\beta$  devient le point isolé  $(n+1)$  (resp.  $-(n+1)$ ) de  $\alpha$ .

Ainsi  $B_{n+1}^3(x) = B_{n+1}^4(x) = -nB_n^0(x)$ , dans lequel  $B_n^0(x)$  désigne le polynôme analogue à  $B_n(x)$  mais correspondant aux couplages  $\beta$  de  $K_{n,n}$  tel que  $-n$  est point isolé.

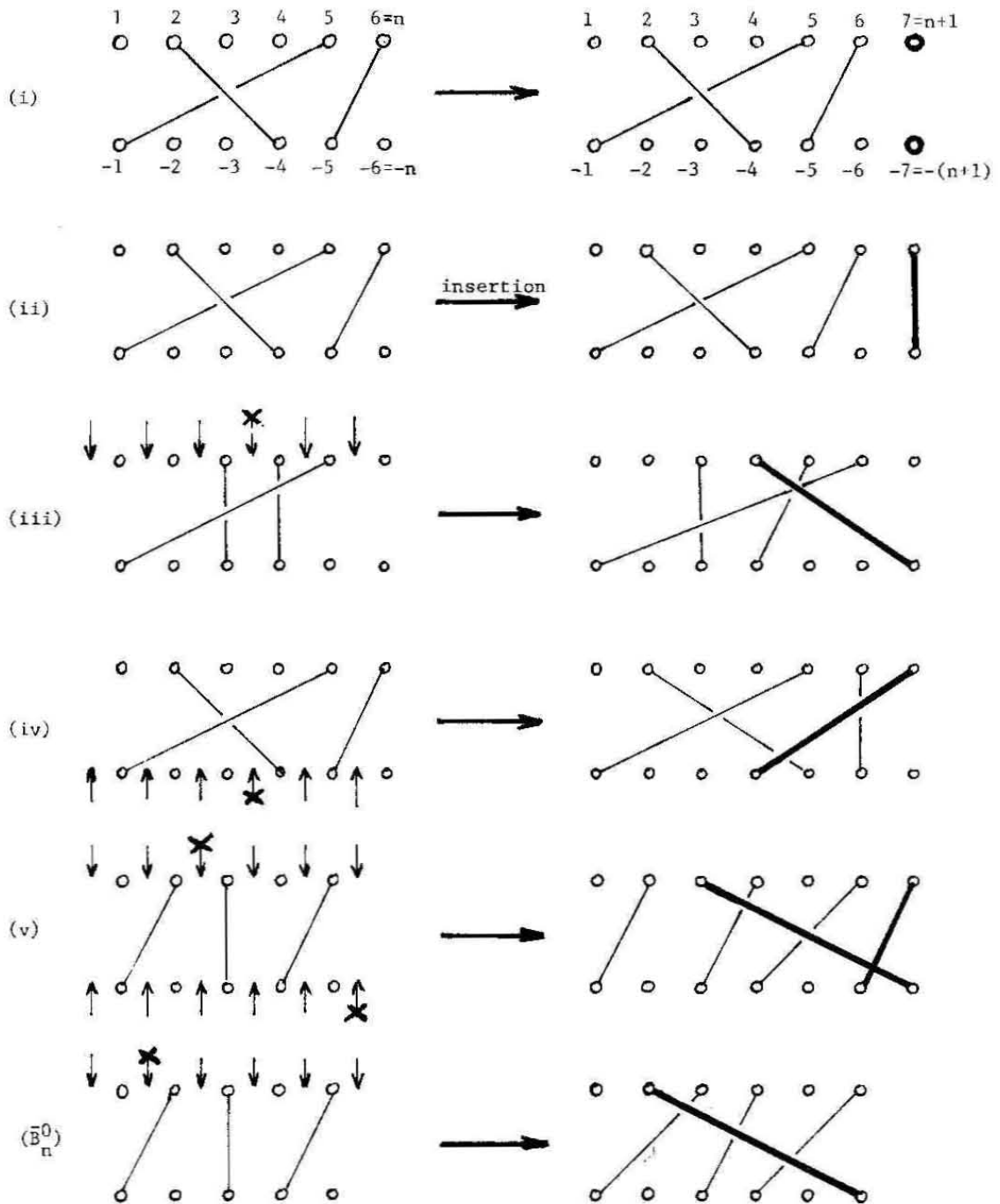
D'autre part tout couplage  $\alpha$  de  $K_{n+1,n+1}$  du type (v) est obtenu en "insérant" deux arêtes à la fois, comme indiqué sur la figure 1, à un couplage (quelconque)  $\gamma$  de  $K_{n-1,n-1}$ . Il y a  $n$  insertions possibles pour chaque arête et donc  $B_{n+1}^5(x) = n^2 B_{n-1}(x)$ .

En regroupant les cinq cas, on arrive à la récurrence

$$(6) \quad B_{n+1}(x) = x^2 B_n(x) - B_n(x) - 2nB_n^0(x) + n^2 B_{n-1}(x).$$

Mais  $B_n^0(x)$  (qui n'est pas autre chose que  $B_n^1(x) + B_n^3(x)$ ) peut s'écrire aussi  $B_n^0(x) = B_n(x) - \bar{B}_n^0(x)$ . Le polynôme  $\bar{B}_n^0(x)$  est relatif aux couplages  $\beta$  de  $K_{n,n}$  tel que  $-n$  est recouvert par une arête (type (ii), (iii) ou (v)). Un tel couplage est obtenu en "insérant" (de  $n$  façons différentes), une arête à un couplage (quelconque)  $\gamma$  de  $K_{n-1,n-1}$  (voir figure 1). On a donc la relation

$$(7) \quad \bar{B}_n^0(x) = B_n(x) + nB_{n-1}(x).$$



$\uparrow \downarrow$  positions possibles pour une insertion  
 $\star \times$  positions effectivement choisies.

Figure 1 Récurrence pour les polynômes  $B_n^{(j)}(x)$ ,  $1 \leq j \leq 5$  et pour  $B_n^0$ , avec  $n = 6$ .



De (6) et (7), on déduit (5) et donc  $B_n(x) = L_n(x^2)$ .

Nous généralisons la notion de polynôme de couplage comme suit.

Soit  $G = (S, A)$  un graphe fini. Une valuation de  $G$  est la donnée d'une application  $v: S \cup A \rightarrow \mathbb{K}$  associant à chaque sommet  $s \in S$  et à chaque arête  $\{s, t\} \in A$  un élément d'un anneau commutatif unitaire  $\mathbb{K}$ .

Définition 6. Un pavage du graphe  $G = (S, A)$  est la donnée d'un ensemble de parties de  $S$  deux à deux disjointes et qui sont, soit réduites à un sommet  $s \in S$  (monomino), soit réduites à une arête  $\{s, t\}$  (domino).

Les parties (de cardinal 1 ou 2) d'un pavage sont appelées pièces du pavage.

La valuation du pavage  $\alpha$  de  $G$  est

$$(8) \quad v(\alpha) = \prod_{\xi} (-v(\xi)),$$

dans lequel le produit est étendu à toutes les pièces (monominos ou dominos) du pavage  $\alpha$ .

Le polynôme de pavage  $P(G; x)$  du graphe  $G = (S, A)$  valué par  $v$  est alors défini par la relation

$$(9) \quad P(G; x) = \sum_{\alpha} v(\alpha) x^{p(\alpha)},$$

où la sommation est étendue à tous les pavages  $\alpha$  de  $G$ , et où  $p(\alpha)$  désigne le nombre de points isolés de  $\alpha$ .

Si  $G$  est le segment  $\text{Seg}_n$ , on retrouve les polynômes orthogonaux généraux. Si la valuation est telle que  $v(s) = 0$  pour tout sommet  $s \in S$ , et  $v(a) = 1$  pour toute arête  $a \in \mathbf{A}$ , on retrouve les polynômes de couplage .

La relation (3) est évidemment vérifiée pour les polynômes de pavage et, la relation (4) devient

$$(4) \quad P(G; x) = (x - v(s))P(G \setminus s; x) - \sum_a v(a)P(G \setminus a; x)$$

où la sommation est parmi les arêtes  $a$  passant par  $s$ .

52. Fractions continuées arborescentes

Soit  $T$  un arbre pointé (ou enraciné), c'est-à-dire un graphe sans cycle ayant un sommet distingué  $r$  (la racine). En général  $T$  sera infini. On parlera des fils d'un sommet  $x$ . Tout sommet  $y$  autre que la racine a un père.

Un arbre préfixe de  $T$  est un arbre  $B$  enraciné en  $r$  dont les sommets sont une partie des sommets de  $T$  et telle que pour tout sommet  $s$  de  $B$  différent de  $r$ , le père  $t$  de  $s$  est sommet de  $B$ , et l'arête  $\{t,s\}$  est arête de  $B$ .

Un chemin  $\omega = (s_0, \dots, s_n)$  sur l'arbre  $T$  est un chemin dont les pas élémentaires  $(s_i, s_{i+1})$  sont de l'un des trois types suivants: soit  $s_{i+1} = s_i$  (pas stationnaire) soit  $s_{i+1}$  est l'un des fils de  $s_i$ , soit  $s_{i+1}$  est le père de  $s_i$  (retour vers la racine). Un tel chemin sera appelé aussi chemin large par opposition aux chemins stricts, c'est-à-dire aux chemins sans pas stationnaire.

Soit  $v$  une valuation de l'arbre  $T$  (en tant que graphe). Par commodité et analogie avec les chemins interprétant les moments, nous noterons respectivement pour tout sommet  $s$  de  $T$  et pour tout sommet  $s \neq r$  dont le père est noté  $t$ ,

$$(10) \quad v(s) = b_s; \quad v(\{t,s\}) = \lambda_s$$

La valuation  $v(\omega)$  d'un chemin  $\omega$  sur l'arbre  $T$  est définie comme le produit des valuations de ses pas élémentaires. La valuation du pas stationnaire  $(s,s)$  est  $b_s$ . Si  $t$  est le père de  $s$ , le pas  $(t,s)$  est valué 1 et le pas  $(s,t)$  (retour vers la racine) est valué  $\lambda_s$ .

On s'intéresse alors à la série génératrice

$$(11) \quad f(t) = \sum_{\omega} v(\omega) t^{|\omega|},$$

où la sommation est parmi tous les chemins  $\omega$  sur l'arbre  $T$  allant de  $r$  à  $r$ . Notons  $\Omega_r$  l'ensemble de tels chemins. Si une confusion est à craindre, on notera aussi  $f(t)$  par  $f(T;t)$  et  $\Omega_r$  par  $\Omega_r(T)$ .

Soit  $D$  l'arbre demi-droite, c'est-à-dire l'arbre ayant pour sommets les entiers  $\geq 0$  et pour arêtes les paires d'entiers consécutifs  $\{k-1, k\}$  ( $k \geq 1$ ). Il est clair que  $f(D;t)$  est la série génératrice des moments  $\mu_n$  des polynômes orthogonaux généraux. Un chemin sur l'arbre  $D$  est la projection sur l'axe vertical d'un chemin de Motzkin.

La théorie du chapitre V (§§1,3) se généralise sans problème aux chemins sur un arbre quelconque  $T$ .

Si l'arbre est réduit à un point, alors  $f(t) = \frac{1}{1-b_r t}$ . Sinon, notons  $(x_1, \dots, x_p)$  les fils de la racine  $r$ . Pour  $i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , soit  $T_i$  le sous-arbre de  $T$  enraciné en  $x_i$ .

Tout chemin  $\omega$  de  $\Omega_r(T)$  se factorise de manière unique en produit de chemins primitifs, c'est-à-dire des chemins de  $\Omega_r(T)$  ne passant par la racine  $r$  qu'au début et à la fin. D'autre part, tout chemin primitif  $\omega$  de  $\Omega_r(T)$  est soit réduit à  $\omega = (r,r)$ , soit de la forme  $\omega = \xi \omega^{(1)} \eta$  avec  $\xi$  pas élémentaire  $(r, x_i)$ ,  $\eta$  pas élémentaire  $(x_i, r)$  et  $\omega^{(1)}$  chemin de  $\Omega_{x_i}(T_i)$ .

On peut donc écrire la relation

$$(12) \quad f(T;t) = \frac{1}{1 - b_r t - \sum_{i=1}^p \lambda_{x_i} t^2 f(T_i;t)} .$$

En "itérant" cette relation récursive on obtient ce que nous appelons un développement en "fraction continuée arborescente" (relativement à l'arbre  $T$ ) de la série  $f(t)$ .

Nous devons préciser les questions de convergence.

Nous supposons  $T$  infini et soit  $B$  un arbre préfixe fini de  $T$ . Les séries génératrices  $f(B;t)$  jouent le rôle des convergents  $J_k(t)$  du chapitre V.

Définissons l'ordre d'un arbre préfixe fini  $B$  de  $T$ , comme la longueur minimum des chemins  $\omega$  allant de la racine  $r$  aux sommets  $s$  de  $B$  tels que  $s$  ait (au moins), un fils  $t \notin B$ . Nous noterons  $Or(B,T)$  l'ordre de  $B$  (relativement à  $T$ ).

Il est clair que les deux séries  $f(T;t)$  et  $f(B;t)$  coïncident jusqu'aux termes de degré  $\leq 2m+1$  si  $m = Or(B,T)$ .

Soit  $\{B_n\}_{n \geq 0}$  une suite croissante (tout sommet de  $B_n$  est sommet de  $B_{n+1}$ ) d'arbres préfixes de  $T$  telle que la suite des ordres tende vers l'infini. La suite de séries formelles  $\{f(B_n;t)\}_{n \geq 0}$  admet une limite (au sens de la topologie ultramétrique usuelle) dans l'anneau  $K[[t]]$  avec  $K = \mathbb{Z}[\{b_s, s \in T\}; \{\lambda_s, s \in T, s \neq r\}]$  (on a identifié  $T$  avec l'ensemble de ses sommets). De plus, cette limite est  $f(T;t)$ . Si  $B_n$  est fini pour  $n \geq 0$ ,

une application récursive de (12) permet d'écrire  $f(B_n; t)$  sous forme d'une fraction continuée arborescente finie (voir exemple ci-dessous). Ces expressions ont pour limite  $f(T; t)$  que l'on peut écrire sous forme d'une "fraction continuée arborescente" (infinie). Cette expression s'écrit sous forme d'un arbre infini, qui est précisément  $T$ .

Les J-fractions du chapitre V sont les fractions continuées arborescentes relatives à l'arbre  $T = D$ , la demi-droite. Les arbres préfixes finis  $B$  sont les segments  $[0, k]$ , et  $f([0, k]; t)$  est le convergent noté  $J_k(t)$  au chapitre V.

Par une preuve bijective directe, ou en appliquant le théorème général donnant l'inverse de la matrice  $(I - V(B))$  avec  $V(B)$  matrice de transition de l'arbre  $B$ , valuée avec  $b_s$  et  $\lambda_s$ , ( $s \in B$ ), on démontrerait l'analogue de la proposition V-2

Proposition 7 Soit  $B$  un arbre préfixe fini de l'arbre valué  $T$ . En notant  $x_1, \dots, x_p$  les fils de la racine de  $T$ , le convergent  $f(B; t)$  est égal à la fraction rationnelle

$$(13) \quad f(B; t) = \frac{\prod_{i=1}^p P^*(B_i; t)}{P^*(B; t)},$$

dans lequel  $P^*(B; t)$  (resp.  $P^*(B_i; t)$ ) est le polynôme réciproque du polynôme de pavage (défini par (9) et (10)) de  $B$  (resp. du sous-arbre  $B_i$  de  $B$  enraciné en  $x_i$ ).

En particulier la série génératrice des chemins stricts (sans pas stationnaire) sur l'arbre fini  $T$  est une fraction rationnelle dont le dénominateur est le polynôme réciproque  $C^*(B; t)$  du polynôme de couplage de  $B$ .

Les polynômes  $P(B;t)$  pour  $B$  arbre préfixe fini de l'arbre (infini)  $T$  jouent le rôle des polynômes orthogonaux. En général, on perd la propriété d'orthogonalité. Toutefois de nombreuses preuves bijectives des chapitres précédents se généraliseraient à ces polynômes. Un exemple typique serait la propriété suivante.

Soient  $B$  un arbre préfixe fini de l'arbre valué  $T$ ,  $s$  un sommet de  $T$  et  $\Omega_{r,s}$  l'ensemble des chemins sur  $T$  allant de la racine  $r$  à  $s$ . Alors on a l'égalité

$$(14) \quad P^*(B;t) \left( \sum_{\omega \in \Omega_{r,s}} v(\omega) t^{|\omega|} \right) = \sum_{(\alpha, \omega)} v(\alpha) v(\omega) t^{|\omega| + m(\alpha) + 2d(\alpha)}$$

dans laquelle la sommation du membre droite est parmi les paires  $(\alpha, \omega)$  vérifiant les deux conditions suivantes:

- (i) le chemin  $\omega$  s'écrit  $\omega = \omega_1 \omega_2$  avec  $\omega_1$  chemin sur  $B$ , allant de  $r$  à un certain sommet  $t$  de  $B$ , et ne se recoupant pas avec lui-même. Le chemin  $\omega_2$  est soit vide ( $t=s$ ), soit un chemin  $\omega_2 = (t, u, \dots, s)$  avec  $u \notin B$ .
- (ii)  $\alpha$  est un pavage de  $B$  formé de  $m(\alpha)$  monominos et  $d(\alpha)$  dominos ne touchant pas le chemin  $\omega_1$ .

En fait, on pourrait restreindre beaucoup plus la sommation du 2<sup>ème</sup> membre dans le cas où  $\omega_2$  est non vide.

Le calcul des polynômes  $P(B;t)$  se fait par récurrence en appliquant la relation (3) (aux polynômes de pavages) et la relation (4) pour  $s = r$  racine de  $B$ .

Pour tout sommet  $s$  de  $B$ , nous notons par  $B_s$  le sous-arbre de  $B$  enraciné en  $s$  et par  $F(s)$  l'ensemble des fils de  $s$ . Notons  $F(s) = \{x_1, \dots, x_p\}$ . On peut alors écrire la récurrence

$$(15) \quad P(B;t) = (t-b_r) \prod_{i=1}^p P(B_i;t) - \sum_{i=1}^p (\lambda_i \prod_{j \neq i} P(B_j;t) \prod_{y \in F(x_i)} P(B_y;t)).$$

La récurrence (15) est l'analogie de la récurrence linéaire fondamentale des polynômes orthogonaux.

Nous terminons ce paragraphe par un bel exemple.

#### Exemple 8 Cartes planaires

Une carte planaire est la représentation sur la sphère, définie à homéomorphisme près, d'un graphe planaire, par des points et des arcs continus deux à deux disjoints. On verra [37] pour une définition plus formelle. Une carte planaire dans lequel on distingue une arête est dite carte planaire pointée.

Tutte et ses élèves ont donné de nombreuses formules énumérant diverses classes de cartes planaires. Ces formules sont remarquables par leur simplicité et, en général, difficiles à démontrer. En particulier, soit  $a_m$  le nombre de cartes planaires pointées ayant  $m$  arêtes. La série génératrice  $f(t) = \sum_{m \geq 0} a_m t^m$  vérifie le système algébrique

$$(16) \quad \begin{aligned} f(t) &= g(t) - t(g(t))^3, \\ g(t) &= 1 + 3t(g(t))^2, \end{aligned}$$



d'où l'on peut décrire

$$(17) \quad a_m = 2 \cdot 3^m \frac{(2m)!}{m!(m+2)!}.$$

Cori et Vauquelin [ 8 ] ont donné une preuve bijective des relations (16) et (17) en construisant une bijection entre les cartes planaires pointées ayant  $m$  arêtes et ce qu'ils appellent les arbres bien étiquetés ayant  $(m+1)$  sommets.

Un arbre est dit "bien étiqueté" lorsque ses sommets sont étiquetés par des entiers  $\geq 0$ , la racine est étiquetée 0 et les deux étiquettes de deux sommets voisins diffèrent d'au plus 1.

Notons  $T_3$  l'arbre ternaire infini, c'est-à-dire l'arbre dont les sommets sont les mots  $w$  à trois lettres  $a, b, c$  et tel que les (trois) fils de  $w$  soient les mots  $wa, wb$  et  $wc$ . On définit le sous-arbre  $T_3^+$  de  $T_3$  dont les sommets sont les mots  $w$  vérifiant  $|w|_c - |w|_a \geq 0$ .

Tout arbre ayant  $m+1$  sommets peut être codé par un mot de Dyck de longueur  $2m$  (c'est très classique!). A tout chemin strict  $\omega$  sur un arbre  $T$  allant de la racine à la racine on peut associer (par projection), un mot de Dyck ( $x$  si l'on s'éloigne de la racine,  $\bar{x}$  si l'on s'en rapproche). Il est trivial de voir que la donnée d'un bon étiquetage pour un arbre associé un mot de Dyck donné  $w$ , correspond exactement à se donner le chemin  $\omega$  de  $\Omega_r(T_3^+)$  se projetant sur  $w$ , c'est-à-dire le choix d'un fils (parmi deux ou trois) lorsque l'on s'éloigne de la racine  $r$  dans l'arbre  $T_3^+$ .

Ainsi la série génératrice  $f(T) = \sum_{m \geq 0} a_m t^m$  est la même (au changement de variable près  $t \rightarrow t^2$ ) que la série génératrice des chemins (stricts) de l'arbre  $T_3^+$ , partant et revenant à la racine.

La relation (13) devient dans ce cas

$$\begin{aligned}
 f(t) &= f_0(t), \\
 (18) \quad f_0(t) &= \frac{1}{1 - t f_0(t) - t f_1(t)}, \\
 f_i(t) &= \frac{1}{1 - t f_{i-1}(t) - t f_i(t) - t f_{i+1}(t)}, \quad (i \geq 1).
 \end{aligned}$$

On a désigné par  $f_i(t^2)$  la série génératrice des chemins sur  $T_3^+$  partant et revenant au sommet  $w = c^i$ .

La relation (15) permet de calculer par récurrence, le tableau (triangulaire) des polynômes  $P_{n,k}(x)$ , polynôme de couplage du sous-arbre enraciné en  $w = c^k$  et dont les sommets sont les mots  $w$  de longueur  $\leq n$ . Soit  $B_n$  l'arbre préfixe de  $T_3^+$  obtenu en ne prenant que les sommets  $w$  avec  $|w| \leq n$ . Les convergents sont  $f(B_n; t) = \frac{P_{n-1,0}^*(t) P_{n,1}^*(t)}{P_{n,0}^*(t)}$  et tendent vers  $f(t^2)$ .

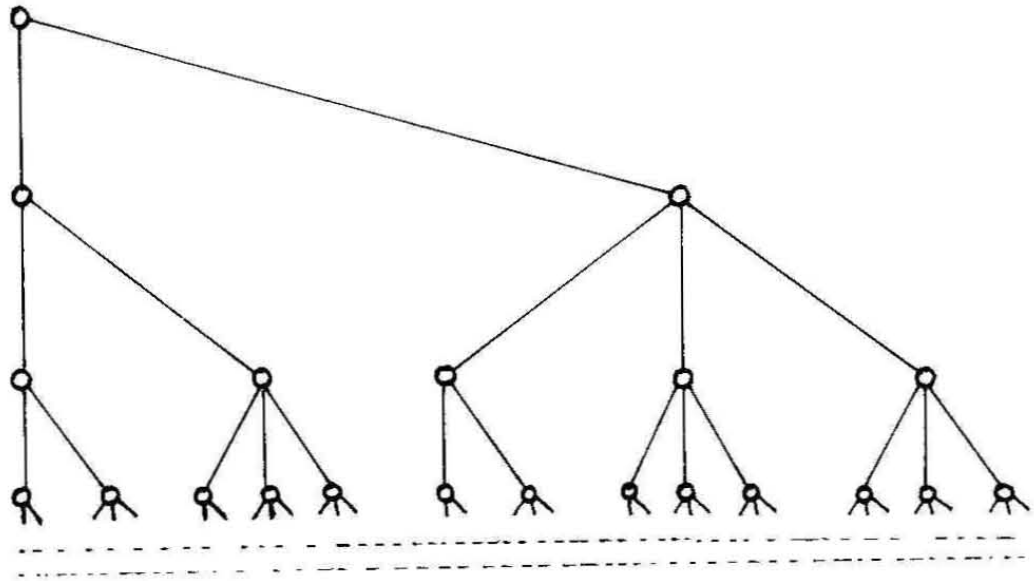


Figure 2 L'arbre  $T_3^+$ .

Les premières valeurs de ces convergents sont

$$\begin{aligned}
 f(B_0; t) &= t, \\
 f(B_1; t) &= \frac{1}{1-2t}, \\
 (19) \quad f(B_2; t) &= \frac{t(1-2t)(1-3t)}{1-7t+11t^2}, \\
 f(B_3; t) &= \frac{t(1-7t+11t^2)(1-8t+13t^2)}{1-17t+105t^2-290t^3+353t^4-144t^5}.
 \end{aligned}$$

Remarque 9

La série  $g(t^2)$  de (16) est la série génératrice des chemins  $\Omega_r(T_3)$ , c'est-à-dire  $\sum_{n \geq 0} 3^n C_n t^{2n}$  avec  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  le  $n^{\text{ième}}$  nombre de Catalan.

De même, il est naturel de considérer l'arbre binaire infini  $T_2$ , dont les sommets sont les mots  $w$  à deux lettres  $a, c$ , et  $T_2^+$  le sous-arbre de  $T_2$  dont les sommets sont les mots  $w$  vérifiant  $|w|_c - |w|_a \geq 0$ . Les chemins de  $\Omega_r(T_2^+)$  sont les chemins de  $\Omega_r(T_3^+)$  n'ayant pas de pas élémentaires  $(w, wb)$ . La série génératrice  $\sum_{m \geq 0} b_m t^{2m}$  de ces chemins admet aussi un développement agréable en fraction arborescente selon  $T_2^+$ . Il découle de Vauquelin [39] et Tutte [37] que  $b_m$  est aussi le nombre de certaines cartes planaires pointées. Une formule fort simple existe aussi pour  $b_m$ .

§3. Chemins arborescents sur un graphe

Soit  $G = (S, A)$  un graphe (supposé, comme dans tout ce chapitre, non orienté, sans boucle ou arête multiple). Un chemin sur  $G$  est une suite  $\omega = (s_0, \dots, s_n)$  de sommets de  $S$  telle que pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , soit  $s_i = s_{i-1}$  (pas stationnaire), soit  $\{s_{i-1}, s_i\}$  est une arête de  $A$ .

A tout chemin  $\omega = (s_0, \dots, s_n)$  sur un graphe  $G$ , on associe deux suites notées  $\{Tr_i(\omega)\}_{0 \leq i \leq n}$  et  $\{Cyc_i(\omega)\}_{0 \leq i \leq n}$ . Pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq n$ ,  $Tr_i(\omega)$  est un chemin sur  $G$ , ne se recoupant avec lui-même (tous ses sommets sont distincts), et allant de  $s_0$  à  $s_i$ . On l'appelle trace à l'instant  $i$  du chemin  $\omega$ . Le terme  $Cyc_i(\omega)$  désigne une suite de cycles  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{\ell(i)}\}$  du graphe  $G$ . Comme dans tout ce mémoire, cycle est pris au sens de la théorie de permutations, en théorie des graphes ce serait un "circuit élémentaire" de  $G$  défini à une permutation circulaire près des sommets. On dira que  $Cyc_i(\omega)$  est la suite de cycles à l'instant  $i$  du chemin  $\omega$ . Ces deux suites sont définies par la récurrence suivante. A l'instant  $i = 0$ ,

$$(20) \quad Tr_0(\omega) = (s_0), \quad Cyc_0(\omega) = \emptyset \text{ (suite vide).}$$

Pour  $i$ ,  $0 \leq i < n$ , supposons définis  $Tr_i(\omega) = (s_0 = t_0, t_1, \dots, t_{k(i)} = s_i)$ , chemin ne se recoupant pas avec lui-même et allant de  $s_0$  à  $s_i$ , ainsi que la suite de cycles  $Cyc_i(\omega) = (\gamma_1, \dots, \gamma_{\ell(i)})$ . La trace et la suite de cycles à l'instant  $i+1$  sont définis comme suit. Si  $s_{i+1}$  est distinct des sommets de  $Tr_i(\omega)$ , alors

$$(21) \quad \begin{aligned} Tr_{i+1}(\omega) &= (s_0 = t_0, t_1, \dots, t_{k(i)} = s_i, s_{i+1}), \\ Cyc_{i+1}(\omega) &= Cyc_i(\omega), \end{aligned}$$

sinon il existe un unique  $j$ ,  $0 < j \leq k(i)$ , tel que  $s_{i+1} = t_j$ . On pose alors

$$(22) \quad \begin{aligned} \text{Tr}_{i+1}(\omega) &= (s_0 = t_0, \dots, t_j = s_{i+1}), \\ \text{Cyc}_{i+1}(\omega) &= (\gamma_1, \dots, \gamma_{\ell(i)}, \gamma), \text{ avec} \\ \gamma &= \gamma_{\ell(i)+1} = (t_j, t_{j+1}, \dots, t_{k(i)}). \end{aligned}$$

Remarquons que la notation  $(t_j, \dots, t_{k(i)})$  désigne un cycle, c'est-à-dire une suite de sommets distincts, définie à une permutation circulaire près.

A la fin (instant  $n$ ), on obtient ainsi  $\text{Tr}(\omega) = \text{Tr}_n(\omega)$ , chemin ne se recoupant pas avec lui-même et ayant même extrémités que  $\omega$ , ainsi que la suite de cycles  $\text{Cyc}(\omega) = \text{Cyc}_n(\omega)$ . Nous les appellerons respectivement la trace et la suite de cycles du chemin  $\omega$ .

Remarque 10.

On pourrait démontrer que la connaissance de  $\text{Tr}(\omega)$  et  $\text{Cyc}(\omega)$  permet de reconstituer le chemin  $\omega$ . En fait, il y a une propriété plus forte. Il suffit seulement de connaître "l'empilement" formé par la suite de cycles. Nous n'aurons pas besoin ici d'introduire le formalisme de la notion combinatoire d'empilements de pièces, qui permet d'unifier (et de simplifier) beaucoup de preuves bijectives de ce mémoire. Le lecteur se reportera à Viennot [41]. Disons simplement que l'empilement associé à la suite de cycles  $(\gamma_1, \dots, \gamma_{k(n)})$  est en bijection avec la classe d'équivalence formée par toutes les suites que l'on peut construire à partir de  $\text{Cyc}(\omega)$  en appliquant les règles de commutation  $(\dots, \gamma_p, \gamma_{p+1}, \dots) \rightarrow (\dots, \gamma_{p+1}, \gamma_p, \dots)$  lorsque  $\gamma_p$  et  $\gamma_{p+1}$  n'ont pas de sommets communs (voir le monoïde de commutation de Cartier, Foata [6]). La notion d'empilement permet aussi de caractériser

agréablement les paires  $(\eta, E)$  ( $\eta$  est un chemin ne se recoupant pas,  $E$  est un empilement de cycles) en bijection avec un chemin  $\omega$ .

Définition 11. Un chemin  $\omega$  sur le graphe  $G$  est dit arborescent (resp. arborescent strict) ssi sa suite de cycles  $Cyc(\omega)$  (définie par (20), (21), (22)) ne contient que des cycles de longueur 1 ou 2 (resp. longueur 2).

On peut se faire une représentation "visuelle" d'un chemin arborescent de la façon suivante. On imagine une "particule", ou "point lumineux" se déplaçant sur le graphe  $G$ , de sommet en sommet, en empruntant les arêtes du graphe. A tout instant  $i$ , la particule est sur un sommet  $s_i$  et a inscrit sur le graphe une "trace lumineuse" qui est un certain chemin ne se recoupant pas avec lui-même (et finissant en  $s_i$ ). A l'instant  $i+1$ , la particule a trois façons de bouger: soit elle va à un nouveau sommet non éclairé (et allume ce sommet), soit elle reste sur place (et ne change rien à la trace lumineuse), soit elle revient sur ses pas en revenant à l'avant-dernier sommet de la trace lumineuse (et en éteignant le dernier sommet  $s_i$  de cette trace lumineuse). Remarquons qu'il n'est pas interdit à la particule de passer plusieurs fois par le même sommet. Un exemple est visualisé sur la figure 3.

Tout chemin sur un arbre est un chemin arborescent. Nous montrerons plus loin la réciproque (d'où la terminologie employée).

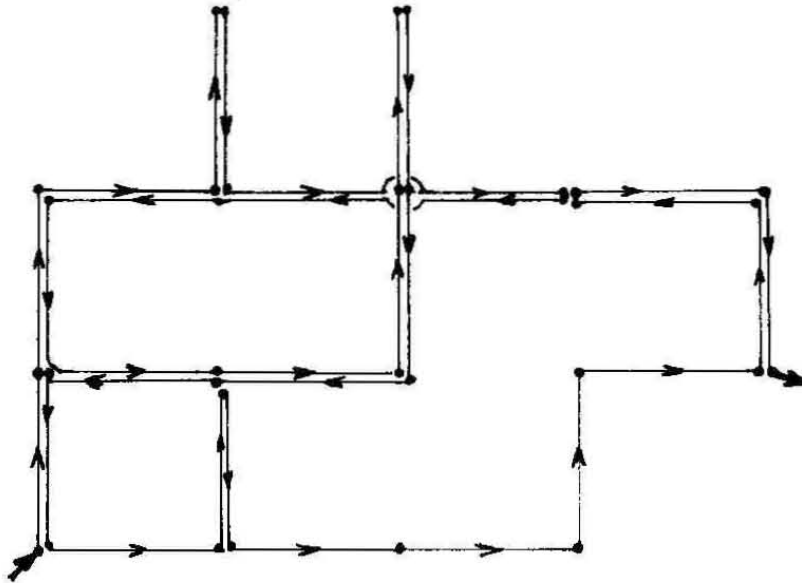


Figure 3. Un chemin arborescent sur  $G = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  allant de  $(0,0)$  à  $(4,1)$ .

Nous supposons que le graphe  $G = (S,A)$  est valué, c'est-à-dire que l'on se donne une application  $v: S \cup A \rightarrow \mathbb{K}$ .

Si  $\omega = (s_0, \dots, s_n)$  est un chemin arborescent de  $G$ , nous définissons la valuation  $v_\omega(s_{i-1}, s_i)$  de ses pas élémentaires de la façon suivante.

$$\begin{aligned}
 (23) \quad v_\omega(s_{i-1}, s_i) &= v(s_i) \quad \text{si } s_{i-1} = s_i, \\
 &= 1 \quad \text{si } s_i \notin \text{Tr}_{i-1}(\omega), \\
 &= v(\{s_{i-1}, s_i\}) \quad \text{si } s_i \in \text{Tr}_{i-1}(\omega), s_i \neq s_{i-1}.
 \end{aligned}$$



Remarquons que dans le premier cas, le pas est stationnaire tandis que le troisième correspond à un "retour en arrière" sur la trace.

Lorsque pour tout  $s \in S$ ,  $v(s) = 0$ , cela revient à considérer les chemins arborescents stricts (sans pas stationnaire).

Remarque 12.

Dans le cas où le graphe  $G$  est la demi-droite  $D = \{0, 1, 2, \dots\}$  (avec pour arêtes les paires  $\{i, i+1\}$ ,  $i \geq 0$ ), les chemins arborescents sur  $D$  sont exactement les projections sur un axe vertical des chemins de Motzkin, et sont en bijection avec ces chemins de Motzkin (avec conservation des valuations). Ainsi, la notion de chemins arborescents valués peut être considérée comme une généralisation "naturelle", pour un graphe quelconque, de la notion de chemins de Motzkin valués interprétant les moments des polynômes orthogonaux généraux.

La proposition fondamentale de ce paragraphe, justifiant la notion de chemin arborescent, et redonnant la proposition V-2 dans le cas  $G = D$ , est la suivante.

Proposition 13 Soit  $G = (S, A)$  un graphe fini muni d'une valuation

$v: SA \rightarrow \mathbb{K}$ , et soit  $s$  un sommet de  $S$ . On a l'égalité

$$(24) \quad \sum_{\omega} v(\omega) t^{|\omega|} = \frac{P^*(G \setminus s; t)}{P^*(G; t)},$$

dans laquelle la sommation est parmi les chemins arborescents sur  $G$  allant de  $s$  et revenant à  $s$ ,  $P^*(G; t)$  (resp.  $P^*(G \setminus s; t)$  est le polynôme réciproque du polynôme de pavage (défini par (9)) du graphe valué  $G$  (resp. du graphe valué  $G$  privé du sommet  $s$ ).

La preuve (bijective) de cette proposition est une extension immédiate de celle de la proposition V-2 (et est tout à fait analogue à d'autres preuves bijectives de ce mémoire comme l'orthogonalité ou l'inversion de la matrice des coefficients).

Il s'agit de démontrer l'égalité

$$(25) \quad \sum_{(\alpha, \omega)} v(\alpha)v(\omega) = \sum_{\beta} v(\beta) ,$$

où la sommation du membre de gauche est parmi les paires  $(\alpha, \omega) \in E_n$  avec  $\alpha$  pavage (avec monominos et dominos) du graphe  $G$ ,  $\omega$  chemin arborescent de  $G$  allant de  $s$  à  $s$ , et telles que  $|\omega| + m(\alpha) + 2d(\alpha) = n$  (en notant respectivement par  $m(\alpha)$  et  $d(\alpha)$  le nombre de monominos et dominos de  $\alpha$ ). La sommation du membre de droite est parmi les pavages  $\beta$  du graphe  $G$ , n'ayant aucune pièce recouvrant  $s$  et tels que  $m(\beta) + 2d(\alpha) = n$ . Notons  $F_n$  les couples  $(\beta, \omega) \in E_n$  formés par un tel pavage  $\beta$  et avec  $\omega$  le chemin vide (allant de  $s$  à  $s$ ). Il suffit donc de trouver une involution  $\phi: E_n \setminus F_n \rightarrow E_n \setminus F_n$  telle que

$$(26) \quad \text{si } \phi(\alpha, \omega) = (\alpha', \omega'), \text{ alors } v(\alpha)v(\omega) = -v(\alpha')v(\omega').$$

Soit  $(\alpha, \omega) \in E_n \setminus F_n$ . Si  $\omega$  est non vide,  $\text{Cyc}(\omega)$  l'est aussi. Notons  $(s_i, s_{i+1})$  le premier cycle de  $\text{Cyc}(\omega)$ . On a alors  $\omega = (s_0 = s, s_1, \dots, s_i, s_{i+1}, \dots)$  avec  $\text{Tr}_i(\omega) = (s_0, s_1, \dots, s_i)$  chemin formé de sommets distincts et  $s_{i+1} = s_i$  (resp.  $s_{i+1} = s_{i-1}$ ). Si aucune pièce de  $\alpha$  ne touche  $\text{Tr}_i(\omega)$ , on pose alors  $\alpha' = \alpha \setminus \{s_i\}$ ,  $\omega' = (s_0, \dots, s_i, s_{i+2}, \dots)$  (resp.  $\alpha' = \alpha \setminus \{s_i, s_{i+1}\}$ ,  $\omega' = (s_0, \dots, s_{i-1}, s_{i+2}, \dots)$ ). Si une pièce  $P$  de  $\alpha$  touche  $\text{Tr}_i(\omega)$ , on enlève cette pièce de  $\alpha$ , soit  $\alpha' = \alpha \setminus P$ , et on "l'insère" dans le chemin arborescent  $\omega$ .

Plus précisément si la pièce est le monomino  $\{s_j\}$  (resp. le domino  $\{s_j, t\}$ ) avec  $0 \leq j \leq i$  (resp.  $t \neq s_0, \dots, s_j$ ) on pose  $\omega' = (s_0, \dots, s_j, s_j, s_{j+1}, \dots)$  (resp.  $\omega' = (s_0, \dots, s_j, t, s_j, s_{j+1}, \dots)$ ). On fait la même construction  $(\alpha, \omega) \rightarrow (\alpha', \omega')$  lorsque  $\omega$  est réduit à  $\omega = (s)$  et que la pièce  $P$  de  $\alpha$  passe par  $s$ .

Le lecteur vérifiera aisément que l'application  $\phi: (\alpha, \omega) \rightarrow (\alpha', \omega')$  est une involution. Elle vérifie trivialement (26).

C.Q.F.D.

Corollaire 14. Soient  $G$  un graphe fini et  $s$  l'un de ses sommets. Soit  $a_n$  le nombre de chemins arborescents stricts (définition 11) de longueur  $n$  allant de  $s$  à  $s$ . La série génératrice associée est

$$(27) \quad \sum_{n \geq 0} a_n t^n = \frac{C^*(G \setminus s; t)}{C^*(G; t)},$$

dans lequel  $C^*(G; t)$  (resp.  $C^*(G \setminus s; t)$ ) est le polynôme réciproque du polynôme de couplage (défini par (1)) du graphe  $G$  (resp. du graphe  $G$  privé du sommet  $s$ ).

Nous justifions la terminologie employée en montrant que tout chemin arborescent sur un graphe  $G$  peut être considéré comme un chemin sur un arbre (au sens de §2).

Soit  $s$  un sommet d'un graphe valué (fini ou infini)  $G = (S, A)$ . Nous définissons un arbre valué, noté  $T_s(G)$ . Les sommets de l'arbre sont les chemins  $\omega$  sur  $G$ , partant de  $s$  et ne se recoupant pas avec eux-mêmes. La racine de l'arbre est le chemin (vide) réduit à  $(s)$ . Nous l'identifierons avec l'élément  $s$ . Les fils du sommet (de l'arbre  $T_s(G)$ )  $\omega = (s_0 = s, \dots, s_n)$  sont tous les chemins de la forme  $(s_0, \dots, s_n, s_{n+1})$  avec  $s_{n+1} \neq s_i$  pour  $0 \leq i \leq n$ .

D'autre part une valuation est définie sur l'arbre  $T_s(G)$  de la façon suivante. Le sommet (de l'arbre)  $(s_0, \dots, s_n)$  est valué  $v(s_n)$  et l'arête (de l'arbre) joignant  $(s_0, \dots, s_n)$  et  $(s_0, \dots, s_n, s_{n+1})$  est valuée  $v(\{s_n, s_{n+1}\})$ .

Soit  $\omega = (s = s_0, \dots, s_n)$  un chemin arborescent sur le graphe  $G$  partant de  $s$ . On associe la suite  $\theta(\omega) = (Tr_0(\omega), \dots, Tr_n(\omega))$ . Cette suite est un chemin sur l'arbre  $T_s(G)$  partant de la racine  $s$ . Il est clair que l'application  $\theta$  est une bijection entre les chemins arborescents sur  $G$  partant de  $s$  et les chemins sur l'arbre  $T_s(G)$  partant de la racine. Les longueurs sont conservées. Il est trivial, d'après les définitions, que la valuation  $v(\omega)$  (en tant que chemin arborescent de  $G$ ) est la même que la valuation  $v(\theta(\omega))$  (en tant que chemin sur l'arbre  $T_s(G)$ ).

En appliquant la proposition 13 à la fois à  $G$  et  $T_s(G)$ , on déduit

Corollaire 15. Soient  $G$  un graphe fini valué,  $s$  un sommet de  $G$  et  $T_s(G)$  l'arbre associé. On a la relation suivante entre polynôme de pavage,

$$(28) \quad \frac{P^*(G \setminus s; t)}{P^*(G; t)} = \frac{P^*(T_s(G) \setminus s; t)}{P^*(T_s(G); t)}$$

Exemple 16.

Soit  $G$  le graphe défini par la figure 4. L'arbre associé  $T_s(G)$  pour  $s = 1$  est donné sur la même figure.

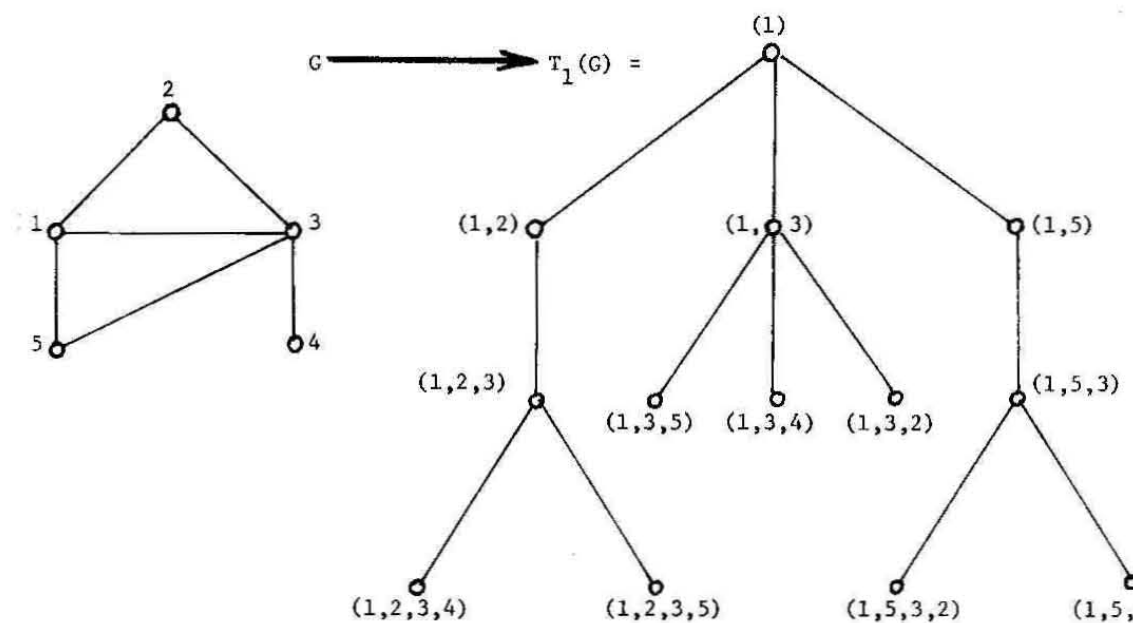


Figure 4. La correspondance  $G \rightarrow T_1(G)$ .

On vérifie sur cet exemple la relation (28) pour les polynômes de couplage:

$$\begin{aligned}
 (28) \quad C^*(G;t) &= 1-6t^2 + 4t^4, \\
 C^*(G \setminus 1;t) &= 1-3t^2, \\
 C^*(T_1(G);t) &= (1-3t^2)^2(1-6t^2+4t^4), \\
 C^*(T_1(G) \setminus 1;t) &= (1-3t^2)^3.
 \end{aligned}$$

Si  $G$  est le segment  $[0, n]$  et  $s = 0$ , l'arbre  $T_s(G)$  est identifié à  $G$ . Ainsi le corollaire 15 n'apporte rien de nouveau pour les polynômes orthogonaux. Par contre, il prend tout son intérêt pour un graphe arbitraire: d'après le §2, la série génératrice des chemins arborescents sur un graphe peut être développée en fraction continue arborescente. D'autre part, l'étude des zéros des polynômes de pavage se ramène à celle des zéros des polynômes de pavage d'un arbre.

Un corollaire est de pouvoir généraliser aux polynômes de pavage (et donc aux polynômes de couplage des graphes) une propriété classique des polynômes orthogonaux:

Corollaire 17 Soit  $G$  un graphe fini valué par  $v: SVA \rightarrow \mathbb{R}$  et telle que la valuation de toute arête est  $\geq 0$ . Alors les zéros du polynôme de pavage  $P(G;t)$  sont réels.

Supposons d'abord que  $G$  est un arbre. Soit  $V(G)$  la  $m \times m$  matrice indexée par les  $m$  sommets de  $G$  et dont le terme générique est défini par

$$\begin{aligned} a_{s,t} &= a_{t,s} = [v(\{t,s\})]^{\frac{1}{2}}, \\ (29) \quad a_{s,s} &= v(s), \text{ pour } s,t \text{ sommets de } G. \end{aligned}$$

D'après la formule générale V-31, il est clair que le polynôme caractéristique  $\det(I_m t - V(G))$  coïncide avec le polynôme de pavage de l'arbre  $G$ . Comme la matrice  $V(G)$  est une matrice symétrique à coefficients réels, les zéros du polynôme  $P(G;t)$  sont réels.

Maintenant supposons que  $G$  est un graphe quelconque (fini). Les zéros (non nuls de  $P^*(G;t)$ ) sont les inverses des zéros (non nuls) de  $P(G;t)$ . D'après le corollaire 15, tout zéro de  $P^*(G;t)$  qui n'est pas zéro de  $P^*(G;s;t)$  est un zéro de  $P^*(T_s(G);t)$ , et donc est réel. Pour avoir la propriété générale, il suffit de raisonner par récurrence sur la taille du graphe: si  $P^*(G;s;t)$  a tous ses zéros réels, il en est de même de  $P^*(G;t)$ .

C.Q.F.D.

Corollaire 18. Le polynôme de couplage d'un graphe fini a tous ses zéros réels.

Dans le cas des polynômes orthogonaux, cette propriété est obtenue sans introduire les chemins arborescents et la relation (28). Il suffisait simplement de considérer le polynôme orthogonal  $P_{n+1}(x)$  (avec  $b_k$  et  $\lambda_k$  comme coefficients associés), comme le polynôme caractéristique de la matrice tridiagonale symétrique (légère variante de la matrice tridiagonale  $T_{n+1}$  du §3, chapitre V) suivante

$$(30) \quad \bar{T}_{n+1} = \begin{bmatrix} b_0 & \lambda_1^{\frac{1}{2}} & & & & \\ \lambda_1^{\frac{1}{2}} & b_1 & \dots & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & \lambda_n^{\frac{1}{2}} & \\ & & & & & \lambda_n^{\frac{1}{2}} \\ & & & & & & b_n \end{bmatrix}$$

Exemple .

Les racines du polynôme de couplage du graphe  $G$  de la figure 4 sont  $\pm \sqrt{3} \pm \sqrt{5}$ .

§4. Couplages, dérangements et orthogonalité.

Nous reprenons les polynômes orthogonaux, apparaissant comme polynôme de couplage, des exemples 2, 4 et 5 du §1.

a) Graphe complet et polynômes d'Hermite

Soit  $H_n(x)$  le polynôme de couplage du graphe complet  $K_n$  et soit  $\phi$  la forme linéaire définie par la relation suivante

$$(31) \quad \phi(x^n) \text{ est le nombre de couplages parfaits de } K_n \text{ (} n \geq 0 \text{)}.$$

On sait que  $H_n(x)$  est le polynôme (unitaire) d'Hermite et que, pour  $n \geq 0$ ,  $\phi(x^{2n+1}) = 0$  et  $\phi(x^{2n}) = 1.3 \dots (2n-1)$ , mais nous utiliserons uniquement dans la suite le fait que  $H_n(x)$  et  $\phi$  sont définis par des couplages.

Soit  $S$  un ensemble et  $(S_1, \dots, S_k)$  une partition de  $S$  en  $k$  parties (non-vides). Notons  $n_i = |S_i|$  pour  $1 \leq i \leq k$ . On considère les graphes complets  $K_S = K_{n_1 + \dots + n_k}$  et  $K_{S_i} = K_{n_i}$  ayant pour ensemble de sommets  $S$  et  $S_i$ , pour  $1 \leq i \leq k$ . Pour tout couplage  $\alpha$  de  $K_S$ , on distingue les arêtes homogènes, c'est-à-dire les arêtes de  $\alpha$  joignant deux sommets du même ensemble  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

Proposition 19. Avec les notations précédentes,  $\phi(H_{n_1}(x) \dots H_{n_k}(x))$  est le nombre de couplages parfaits du graphe complet  $K_{n_1 + \dots + n_k}$  n'ayant aucune arête homogène.

D'après les relations (1) et (31) définissant  $H_n(x)$  et  $\phi$ , il est clair que

$$(32) \quad \phi(H_{n_1}(x) \dots H_{n_k}(x)) = \sum_{\alpha} (-1)^{b(\alpha)},$$



où la sommation est parmi les couplages parfaits colorés  $\alpha$  de  $K_S$  (c'est-à-dire que les arêtes de  $\alpha$  sont colorées en deux couleurs: bleu ou rouge) tels que toute arête bleue est homogène. On a noté  $b(\alpha)$  le nombre d'arêtes bleues de  $\alpha$ .

Toute arête homogène rouge peut être changée en arête bleue et réciproquement (avec changement de signe dans la somme (32)). En ordonnant les arêtes de  $\alpha$ , on définirait aisément une involution groupant deux à deux, les termes de (32) correspondant aux couplages  $\alpha$  ayant au moins une arête bleue ou une arête homogène rouge. Suivant une remarque de F. Bergeron, on peut aussi se passer de la définition précise d'une involution et écrire directement: pour tout ensemble (non vide)  $E$  d'arêtes de  $\bigcup_{1 \leq i \leq k} K_{S_i}$ ,

$$(33) \quad \sum_{\alpha} (-1)^{b(\alpha)} = (1+(-1))^{|E|} = 0,$$

où la sommation est parmi tous les couplages parfaits colorés de  $K_S$  tels que l'ensemble  $\text{Hom}(\alpha)$  des arêtes homogènes soit  $E$ .

Ainsi la sommation (32) est égale à la sommation analogue parmi les couplages  $\alpha$  avec  $\text{Hom}(\alpha) = \emptyset$ . Dans ce cas  $b(\alpha) = 0$ .

C.Q.F.D.

Si  $k = 2$ , on obtient une preuve bijective de l'orthogonalité des polynômes d'Hermite (définis comme polynôme de couplage),

Corollaire 20. Pour tous entiers  $n, m \geq 0$ ,  $\phi(H_n(x)H_m(x))$  est le nombre de bijections de  $[n]$  dans  $[m]$ .

On retrouve bien la relation d'orthogonalité du § , chapitre II:

$$\phi(H_n(x)H_m(x)) = n! \delta_{n,m}.$$

Remarque 21.

On peut aussi écrire la proposition 19 en utilisant la forme intégrale  $\phi(x^n) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp(-x^2/2) dx$  et obtenir ainsi une interprétation combinatoire de l'intégrale  $(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{n_1}(x) \dots H_{n_k}(x) \exp(-x^2/2) dx$ .

Remarque 22.

La preuve bijective de la proposition 19 s'étend immédiatement pour démontrer la propriété plus générale suivante. Soit  $G = (S, A)$  un graphe et  $\bar{G} = (S, \bar{A})$  son graphe complémentaire, c'est-à-dire  $(A, \bar{A})$  est une partition de  $\mathcal{P}_2(S)$ . Alors le nombre de couplages parfaits de  $\bar{G}$  est égal à  $\phi(C(G; x))$ .

b) Grappe biparti complet et polynômes de Laguerre.

Soit  $L_n(x^2)$  le polynôme de couplage du graphe biparti complet  $K_{n,n}$  et soit  $\psi$  la forme linéaire définie par la relation suivante

$$(34) \quad \psi(x^n) \text{ est le nombre de couplages parfaits de } K_{n,n} \quad (n \geq 0).$$

On sait que  $L_n(x)$  est le polynôme (unitaire) de Laguerre et que, pour  $n \geq 0$ ,  $\psi(x^n) = n!$ , mais nous utiliserons uniquement dans la suite les définitions de  $L_n(x)$  et  $\psi$  par les couplages.

Soit  $(S_1, \dots, S_k)$  une partition en  $k$  parties (non vides) d'un ensemble  $S$ . Notons  $n_i = |S_i|$  pour  $1 \leq i \leq k$  et  $n = n_1 + \dots + n_k$ . Soient  $-S, -S_1, \dots, -S_k$  des ensembles disjoints et en bijection avec respectivement  $S, S_1, \dots, S_k$ , et tels que  $(-S_1, \dots, -S_k)$  soit une partition de  $-S$ . On considère les graphes bipartis complets  $K_{S, -S} = K_{n,n}$  et pour  $i, 1 \leq i \leq k$ ,  $K_{S_i, -S_i} = K_{n_i, n_i}$ . On appelle dérangements tout couplage parfait  $\alpha$  de  $K_{S, -S}$  tel que toute arête

de  $\alpha$  joint un sommet de  $S_i$  avec un sommet de  $-S_j$  avec  $i \neq j$ ,  $1 \leq i, j \leq k$ .  
 On peut imaginer que l'on a  $k$  boîtes contenant respectivement  $n_1, \dots, n_k$  boules.  
 On mélange les boules de telle façon que chaque boîte contienne à nouveau  
 le même nombre de boules, et que chaque boule soit déplacée dans une autre  
 boîte. Ce "dérangement" (généralisé) est bien codé par un couplage parfait  
 $\alpha$  comme ci-dessus. Dans le cas où  $n_1 = \dots = n_k = 1$ , on retrouve les déran-  
 gements usuels de la combinatoire classique. On peut énoncer

Proposition 23. Avec les notations précédentes,  $\psi(L_{n_1}(x), \dots, L_{n_k}(x))$  est le  
nombre de dérangements du graphe biparti complet  $K_{n,n}$  avec  $n = n_1 + \dots + n_k$ .

La preuve (bijective) de cette proposition est pratiquement la même  
 que celle de la proposition 19. De même, pour  $k = 2$ , on obtient une preuve  
 bijective de l'orthogonalité des polynômes de Laguerre (définis comme poly-  
 nômes de couplage).

Corollaire 24. Pour tous entiers  $n, m \geq 0$ ,  $\psi(L_n(x)L_m(x))$  est le nombre de  
paires  $(f, g)$  de bijections  $f: [n] \rightarrow [m]$  et  $g: [m] \rightarrow [n]$ .

On retrouve bien la relation d'orthogonalité du §5, chapitre II:

$$\psi(L_n(x)L_m(x)) = (n!)^2 \delta_{n,m}.$$

Remarque 25.

On pourrait aussi utiliser la forme intégrale  $\psi(x^n) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$  et  
 exprimer les nombres de dérangements comme l'intégrale  $\int_0^\infty L_{n_1}(x) \dots L_{n_k}(x) e^{-x} dx$ .

Remarque 26.

On a aussi l'analogue de la remarque 22, extension immédiate de la pro-  
 position 22. Si  $G = (S \cup -S, A)$  un sous-graphe du graphe biparti complet  $K_{S, -S}$

et soit  $\bar{G} = (S \cup \bar{S}, \bar{A})$  le graphe complémentaire relativement à  $K_{S, -S}$ , (c'est-à-dire  $(A, \bar{A})$  est une partition des arêtes de  $K_{S, -S}$ ). Alors on peut affirmer que le nombre de couplages parfaits de  $\bar{G}$  est  $\psi(C(G; x^{\frac{1}{2}}))$ .

Remarque 27.

Dans le cas où  $n_1 = \dots = n_k = 1$ , on retrouve le nombre classique  $d_n$  de dérangements usuels, c'est-à-dire

$$(35) \quad d_n = \psi[(x-1)^n] = \sum_{p=0}^n (-1)^p \frac{n!}{p!}.$$

c) Graphe segment et polynômes de Tchebycheff.

Soit  $F_n(x)$  le polynôme de couplage du "graphe segment"  
 $\text{Seg}_n = ([n], \{\{i, i+1\}, 1 \leq i < n\})$ . Soit  $\gamma$  la forme linéaire définie par:  $\gamma(x^n)$  est le nombre de couplages parfaits  $\alpha$  du graphe complet  $K_n$  n'ayant pas d'arêtes croisées, c'est-à-dire de paires d'arêtes  $\{i, j\}$  et  $\{i', j'\}$  vérifiant

$$(36) \quad 1 \leq i < i' < j < j' \leq n \quad \text{ou} \quad 1 \leq i' < i < j' < j \leq n.$$

On sait que  $F_n(x) = U_n(x/2)$  (polynôme de Tchebycheff de 2<sup>ème</sup> espèce) et que  $\gamma(x^{2n})$  est le nombre de Catalan  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ , mais ceci ne sera pas utilisé dans la suite.

Proposition 28. Pour tout k-uple  $(n_1, \dots, n_k)$  d'entiers non nuls,  $\gamma(F_{n_1}(x) \dots F_{n_k}(x))$  est le nombre de mots de Dyck  $w$  de longueur  $n_1 + \dots + n_k$  vérifiant la condition

$$(37) \quad w = ux\bar{x}v \Rightarrow \exists j, 1 \leq j < k \quad \text{avec} \quad |ux| = n_1 + \dots + n_j.$$

Notons  $n = n_1 + \dots + n_k$ .

D'après les définitions de  $F_n(x)$  et  $\gamma$  comme couplages, il vient

$$(38) \quad \gamma(F_{n_1}(x) \dots F_{n_k}(x)) = \sum_{\alpha} (-1)^{b(\alpha)},$$

dans laquelle la sommation est parmi les couplages parfaits colorés (voir (a) de ce paragraphe) de  $K_n$  n'ayant pas de paires d'arêtes croisées, et tels que les arêtes bleues joignent deux points consécutifs d'un même segment  $S_\ell = [1+n_1+\dots+n_{\ell-1}, n_1+\dots+n_\ell]$ ,  $1 \leq \ell \leq k$ . Comme en (a), le nombre d'arêtes bleues de  $\alpha$  est noté  $b(\alpha)$ . Toute arête rouge joignant deux points consécutifs d'un même segment  $S_\ell$  peut être changée en une arête bleue, et réciproquement. D'une manière analogue à la preuve de la proposition 18, on déduit que le membre droit de (38) est le nombre de couplages parfaits du graphe complet  $K_n$ , n'ayant pas de paires croisées, et vérifiant la condition suivante

$$(39) \quad \text{si } \{i, i+1\} \text{ est une arête de } \alpha, \text{ alors il existe } \ell, 1 \leq \ell < k, \text{ tel que } i \in S_\ell \text{ et } (i+1) \in S_{\ell+1}.$$

Un couplage  $\alpha$  de  $K_n$ , sans paires croisées, est en bijection avec un mot de Dyck  $w$  de longueur  $n$ : il suffit de définir  $w = x_1 \dots x_n$  avec  $x_i = x$ ,  $x_j = \bar{x}$  si  $\{i, j\}$  est une arête de  $\alpha$  avec  $i < j$ . Dans cette bijection, la condition (39) devient la condition (37).

C.Q.F.D.

Remarque 29.

En particulier, comme en (a) et (b), on retrouve l'orthogonalité des polynômes de Tchebycheff  $U_n(x) = F_n(2x)$ . Pour  $n, m \geq 0$ ,  $\gamma(F_n(x)F_m(x))$  est

le nombre de mots de Dyck de longueur  $n+m$  ayant un seul pic  $x\bar{x}$  et ce pic est en position  $n$ . Ainsi  $\gamma(F_n(x)F_m(x)) = \delta_{n,m}$ .

Remarque 30.

En utilisant les expressions intégrales  $\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 x^{2n} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{C}{4^n}$ ,  
 $\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 x^{2n+1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = 0$ , on déduit que le nombre de mots de Dyck de longueur  $n_1 + \dots + n_k$  et vérifiant la condition (37) est égal à l'intégrale  
 $\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U_{n_1}(x) \dots U_{n_k}(x) (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$ .

BIBLIOGRAPHIE COMMENTEE

La paternité des théorèmes classiques sur les polynômes orthogonaux et développements en fractions continuées est en général difficile à établir. Nous éviterons de le faire ici et renvoyons le lecteur aux traités classiques [7], [29], [30], [36], [42]. Certaines propriétés sur les polynômes orthogonaux énoncées dans ce travail peuvent paraître nouvelles. Beaucoup sont plus ou moins implicites dans la littérature classique. Rappelons que ce travail reprend (et prolonge) les articles de Frajolet [14] et Françon, Viennot [20].

Chapitre II. La bijection fondamentale  $\pi \circ \theta$  du chapitre II est due à Françon, Viennot [20]. Une preuve bijective de l'identité (II-65), utilisant la notion d'espèce de structure de Joyal, est due à Blais [43]. Une preuve bijective pour (II-66) reste à trouver. Les polynômes de Meixner  $\hat{m}_n(x; 1, \frac{1}{2})$  ont été étudiés combinatoirement par Kreweras [45]. L'expression (II-72) pour les moments des polynômes de Meixner de seconde espèce  $M_n(x; \delta, n)$  ne semble pas figurer dans la littérature.

Chapitre III. La théorie des polynômes de Sheffer (ch. II, §10 et ch. III, §3) a été systématiquement développée par Rota [33]. La proposition III-7, contenant le théorème d'inversion III-1, est dé-

montrée analytiquement (sous une forme plus générale) par Milne [63]. Cette propriété d'inversion de matrices est énoncée en terme d'inversion de Möbius dans les catégories triangulaires par Leroux [62].

Chapitre IV. Ce chapitre est basé sur un théorème général de Gessel et Viennot interprétant un déterminant général par certaines configurations de chemins deux à deux disjoints. Ce principe général est rappelé au §2. Le cas des déterminants binomiaux (mineurs de la matrice des coefficients binomiaux) est systématiquement développé dans Gessel, Viennot [22]. Le calcul des coefficients  $b_k$  et  $\lambda_k$  donné au §1 s'effectue avec un nombre d'additions, multiplications et divisions pratiquement le même que celui exposé par Gragg [27], bien que ces deux algorithmes soient complètement différents. A cause du nombre de divisions, ces deux algorithmes sont bien meilleurs (pour le calcul des  $b_k$  et  $\lambda_k$ ) que le classique algorithme par quotient-différence (voir par exemple Jones, Thron [29]). Remarquons que l'algorithme présenté ici provient en fait de la méthode de Stieltjes [68] pour développer une série en J-fraction.

Chapitre V. Le théorème fondamental de Flajolet [14], interprétant une J-fraction, est rappelé au §1. Les onze exemples du §2 proviennent de divers articles combinatoires cités dans ce paragraphe. Les preuves bijectives esquissées au §3 sont en fait des cas particuliers de la preuve bijective de Dulucq, Viennot [12] du théorème classique



(V-32) d'inversion de matrice. Cette preuve bijective simplifie celle de Foata [17]. Pour la théorie classique des approximants de Padé, dont il est fait allusion à la fin du §3 (et aussi avec les déterminants de Hankel du chapitre IV), on verra par exemple Cragg [27]. Les expressions des réciproques des identités de Rogers-Ramanujan du §4 sont dues à Andrews [1].

Chapitre VI. La notion de polynôme de couplage d'un graphe a été introduite mainte fois par différents auteurs, indépendamment les uns des autres. La première apparition semble être due à Hellmann et Lieb [28], [55], Kunz [60], Gruber et Kunz [51], ainsi que Hosoya [56], dans des problèmes de physique statistique. Ensuite Gutman et al. [54] font apparaître ces polynômes dans une théorie de l'aromaticité en chimie. Gutman [52] [53] les appelle "acyclic polynomials". De manière équivalente, Aihara [43] les introduit sous le nom de "référence polynomials". Finalement Farrell [47] les réintroduit sous le nom de "matching polynomials". Cette dernière terminologie semble retenue actuellement. Nous proposons en français le terme "polynôme de couplage", ainsi que l'extension immédiate à ce que nous appelons "polynôme de pavage".

Les exemples 2,3,4 du §1 sont donnés par Hellmann, Lieb [28], l'exemple 5 apparaît dans Godsil, Gutman [48], [49].

Les fractions continues arborescentes du §2 semblent avoir été introduites pour la première fois par Skorobogatko et al. [34], en liaison avec des problèmes d'équations différentielles de systèmes mécaniques [32]. Elles sont mieux étudiées actuellement (sous le nom, de "branched continued fractions"): Kutschinskaja [61], Murphy et O'Donohoe [64], Siemaszko [66] [67]. La fraction arborescente de l'exemple 8 est due à Arques et Françon [4], et est basée sur une bijection de Cori, Vauquelin [8] entre les cartes planaires pointées et les arbres "bien étiquetés". Grâce à cette fraction arborescente, Arques [44] a découvert une nouvelle équation fonctionnelle satisfaite par la série génératrice des cartes planaires et qui permet de retrouver plus simplement la formule (VI-17) de Tutte [37] pour le nombre de cartes planaires pointées ayant  $n$  arêtes.

La notion de chemin arborescent ("tree-like paths") est due à Godsil [24], ainsi que les corollaire VI-14 et le corollaire VI-15 (pour les polynômes de couplage). Nous avons suivi la méthode de Godsil pour prouver le corollaire VI-17. Ce travail présente en quelque sorte une étude bijective complète des propositions de Godsil [24]. En fait cette étude bijective présentée au §3, ainsi que celle du §4 provient d'un travail commun de l'auteur avec DeSainte-Catherine, constituant le 6<sup>ème</sup> chapitre de la thèse 3<sup>ème</sup> cycle de cette dernière [10]. Remarquons que la notion de chemin arborescent, ainsi que les bijections présentées dans le §3, sont des cas particuliers de consi-

dérations relatives aux "empilements de pièces" introduits par Dulucq, Viennot [12], [40], en liaison avec le monoïde de commutation de Cartier, Foata [6]. Les chemins arborescents sont en bijection avec les "empilements de monominos et dominos" sur un graphe. Pour plus de détails, voir DeSainte-Catherine [10].

Le corollaire VI-18 est dû à Heilman, Lieb [28], et indépendamment Gruber, Kunz [51]. Il a une importance capitale dans les applications en chimie et physique évoquées ci-dessus.

Le §4, donne des preuves bijectives de théorèmes connus interprétant certaines intégrales de produits de polynômes orthogonaux (Hermite, Laguerre) comme nombre de dérangements. La proposition VI-19 est due à Azor et al. [3]. La proposition VI-23 est due à Kaplansky [58]. D'autres preuves (analytiques) sont données par Even, Gillis [46] et plus simplement par Askey, Ismail [2]. Ces derniers en donnent des généralisations. Godsil [23] généralise aussi les propositions VI-19 et VI-23 aux polynômes de couplages. Des preuves bijectives ont été faites par l'auteur avec DeSainte-Catherine, pour plus de détails voir [10]. L'interprétation pour les polynômes de Tchebycheff (proposition VI-28 et remarque 30) semble nouvelle.

Signalons enfin que les classiques "rook polynomials" (voir Rioridan [65]) peuvent être considérés comme des polynômes de couplages

d'un graphe biparti. Godsil et MacKay [50] viennent très récemment d'utiliser cette remarque, le corollaire VI-14 sur la série génératrice des chemins arborescents, combiné avec une localisation des zéros (réels d'après le corollaire VI-17) donnée par Heilman et Lieb [28], la proposition VI-23 (avec la remarque 25), ainsi que d'autres considérations, pour donner une estimation asymptotique très fine du nombre de rectangles latins.

## REFERENCES

La bibliographie de Foata [19] , sur les interprétations combinatoires de familles particulières de polynômes orthogonaux, n'est pas reprise ici. Il faudrait y ajouter Bergeron [5].

- [1] G.E. ANDREWS, The Rogers-Ramanujan reciprocal and Minc's partition function, Pacific J. Math., 95 (1981), 251-256.
- [2] R. ASKEY, M. ISMAIL, Permutations problems and special functions, Canad. J. Math. 28 (1976), 853-874.
- [3] R. AZOR, J. GILLIS, J.D. VICTOR, Combinatorial applications of Hermite polynomials, SIAM J. Math. Anal., 13 (1982).
- [4] D. ARQUES et J. FRANÇON, Arbres bien étiquetés et fractions multicontinues, in Proc. 9ème Colloque Inter. sur les arbres en algèbre et programmation, Bordeaux, 1983, à paraître, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [5] F. BERGERON, Modèles combinatoires de familles de polynômes orthogonaux, manuscrit, UQAM, 1983, à paraître.
- [6] P. CARTIER et D. FOATA, Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements, Lecture Notes in Math. no 85, Springer-Verlag, New-York/Berlin, 1969.
- [7] T.S. CHIHARA, An Introduction to orthogonal polynomials, Gordon and Breach, New-York/London/Paris, 1978.
- [8] R. CORI et B. VAUQUELIN, Planar maps are well labeled trees, Can. J. Math., 33 (1981), 1023-1042.
- [9] M. DELEST et G. VIENNOT, Algebraic languages and polyminoes enumeration, à paraître, Theor. Computer Sci. résumé in "Automata, Languages and Programming", Proc. 10th colloquium, Barcelona, Espagne, Juillet 1983, J. Diaz ed., Lecture Notes in Computer Science, no154, Springer-Verlag, Heidelberg, 1983, p. 173-181.

- [10] M. DESAINTE-CATHERINE, Couplages et Pfaffiens en combinatoire et physique, thèse 3ème cycle, Université de Bordeaux I, 1983.
- [11] A. DRAUX, Polynômes orthogonaux formels, applications, Lecture Notes in Mathematics no974, Springer-Verlag, New-York/Berlin, 1983.
- [12] S. DULUCQ, G. VIENNOT, The Cartier-Foata commutation monoid revisited with heaps of pieces, manuscrit, 1984.
- [13] D. DUMONT, G. VIENNOT, A combinatorial interpretation of the Seidel generation of Genocchi numbers, *Annals of Discrete Math.* 6 (1980), 77-87.
- [14] P. FLAJOLET, Combinatorial aspects of continued fractions, *Discrete Math.*, 32, (1980), 125-161.
- [15] P. FLAJOLET, J. FRANCON, J. VUILLEMIN, Sequence of operations analysis for dynamic data structures, *J. of Algorithm*, 1 (1980), 111-141.
- [16] M. FLIESS, M. LAMNABHI et F. LAMNABHI-LAGARRIGUE, An algebraic approach to nonlinear fonctionnal expansions, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 30 (1983), 554-570.
- [17] D. FOATA, A non-commutative version of the matrix inversion formula, *Advances in Math.* 31 (1979), 330-349.
- [18] D. FOATA, A combinatorial proof of Jacobi's identity, *Annals of Discrete Math.*, 6 (1980), 125-135.
- [19] D. FOATA, Combinatoire des identités sur les polynômes orthogonaux, Proc. du Congrès International des Mathématiciens, section 16, Combinatorics and Mathematical Programming, Varsovie, 1983.
- [20] J. FRANÇON, G. VIENNOT, Permutations selon les pics, creux, doubles montées, doubles descentes, nombres d'Euler et nombres de Genocchi, *Discrete Math.*, 28 (1979), 21-35.

- [21] I. GESSEL, A non commutative generalization and  $q$ -analog of the Lagrange inversion formula, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 257 (1980), 455-481.
- [22] I. GESSEL, G. VIENNOT, Binomial determinant, paths and hook lengths formulas, preprint, M.I.T., 1984.
- [23] C.D. GODSIL, Hermite polynomials and duality relation for matching polynomials, *Combinatorica*, 1 (1981), 257-262.
- [24] C.D. GODSIL, Matchings and walks in graphs, *J. Graph Th.*, 5 (1981), 285-291.
- [25] D. GOUYOU-BEAUCHAMPS, Bijective aspects of Motzkin and Schröder numbers, en préparation.
- [26] D. GOUYOU-BEAUCHAMPS, G. VIENNOT, The number of directed animals, preprint, 1984.
- [27] W.B. GRAGG, The Padé table and its relation to certain algorithms of numerical analysis, *SIAM Review* 14 (1972), 1-62.
- [28] J. HEILMAN et E.H. LIEB, Theory of monomer-dimer systems, *Comm. Math. Phys.*, 25 (1972), 190-232.
- [29] W.B. JONES et W.J. THRON, Continued Fractions, Analytic Theory and Applications, *Encyclopedia of Math. and its Appl.*, vol. 11, G.C. Rota ed., Addison-Wesley, Reading, 4 1980.
- [30] O. PERRON, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Band II, Teubner, Stuttgart, 1957.
- [31] G. POLYA, On the number of certain lattice polygons, *J. Comb. Theory*, 6 (1969), 102-105.

- [32] I.P. PUSTOMEL'NIKOV, The method of branching continued fractions for the solution of boundary value problems for an ordinary differential equation given on a tree (en ukrainien), *Visnik L'viv Politehn. Inst.*, 31 (1969), 37-43.
- [33] G.C. ROTA, D. KAHANER et A. ODLYZKO, Finite operator calculus, *J. Math. Anal. Appl.* 42 (1973), 685-760.
- [34] V.J. SKOROBOGAT'KO, N.S. DRONJUK, O.I. BOBIK, B.I. PTASNIK, Branching continued fractions (en ukrainien), *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR, Ser. A* (1967), 131-134.
- [35] H. STRAUBING, Preprint, Dep. of Math. Reed College, Portland, Oregon, USA, 1982.
- [36] G. SZEGÖ, Orthogonal Polynomials, 4ème édition, A.M.S., Providence (1978).
- [37] W.T. TUTTE, A census of planar maps, *Canad. J. Math.*, 15 (1963), 249-271.
- [38] M. VAUCHAUSSADE de CHAUMONT et G. VIENNOT, deux résumés d'un article à venir: Polynômes orthogonaux et problèmes d'énumération en biologie moléculaire, *Proc. Séminaire lotharingen, Ste-Croix-aux-Mines*, Mai 1983; Enumeration of RNAs secondary structure by complexity, in *Proc. Inter. Conference "Mathematics in Medicine and Biology"*, Bari, Italie, Juillet 1983.
- [39] B. VAUQUELIN, exposé au congrès "Fête des mots", Rouen, 1982, non publié.
- [40] G. VIENNOT, Théorie combinatoire des nombres d'Euler et Genocchi, *Séminaire Théorie des nombres 1981/1982*, Publication de l'Univ. Bordeaux I, 94p.
- [41] G. VIENNOT, Problèmes combinatoires posés par la Physique Statistique, *Séminaire Bourbaki*, 36ième année, 1983/84, no626, à paraître dans *Astérisque*, S.M.F.
- [42] H.S. WALL, Analytic Theory of continued fractions, Chelsea, New-York, 1967.



- [43] J. AIHARA, A new definition of Dewar-type resonance energy, *J. Amer. Chem. Soc.*, 98 (1976), 2750-2758.
- [44] D. ARQUES, Une nouvelle équation fonctionnelle pour les cartes planaires, *manuscrit*, 1984.
- [45] C. BLAIS, Espèces de structures et polynômes eulériens, *Mémoire de maîtrise*, UQAM, 1982.
- [46] S. EVENS et J. GILLIS, Derangements and Laguerre polynomials, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 79 (1976), 135-143.
- [47] E.J. FARRELL, An introduction to matching polynomials, *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 27 (1979), 75-86.
- [48] C.D. GODSIL et I. GUTMAN, On the matching polynomial of a graph, in "Algebraic methods in Graph Theory", *Proc. Colloquia Math. Soc. János Bolyai*, Szeged (Hongrie), 1978, p. 241-249.
- [49] C.D. GODSIL et I. GUTMAN, On the theory of the matching polynomial, *J. of Graph Theory*, 5 (1981), 137-144.
- [50] C.D. GODSIL et MacKAY, Asymptotic enumeration of Latin rectangles, *Bull. AMS*, 10 (1984), 91-92.
- [51] C. GRUBER et H. KUNZ, General properties of polymer systems, *Comm. Math. Phys.*, 22 (1971), 133-161.
- [52] I. GUTMAN, The acyclic polynomial of a graph, *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, 22, (1977), 63-69.
- [53] I. GUTMAN et H. HOSOYA, On the calculation of the acyclic polynomial, *Theoret. Chim. Acta*, 48 (1978), 279-286.

- [54] I. GUTMAN, M. MILUN et N. TRINATSTIC, Non-parametric resonance energies of arbitrary conjugated systems, *J. Amer. Chem. Soc.*, 99 (1977), 1692-1704.
- [55] O.T. HEILMANN et E.H. LIEB, Monomers and dimers, *Phys. Rev. Lett.*, 24 (1970), 1412-1414.
- [56] H. HOSOYA, Topological index, *Bull. Chem. Soc. Japan*, 44 (1971), 2332-2339.
- [57] A. JOYAL, Une théorie combinatoire des séries formelles, *Adv. in Math.*, 42 (1981), 1-82.
- [58] I. KAPLANSKY, On a generalization of the "Problème des rencontres", *Amer. Math. Monthly*, 46 (1939), 159-161.
- [59] G. KREWERAS, Permutations partiellement soulignées et polynômes géométriques, *Europ. J. Combinatorics*, 2 (1981), 155-163.
- [60] H. KUNZ, Location of the zeros of the partition function for some classical lattice systems, *Phys. Lett.*, 32A (1970), 311-312.
- [61] K.J. KUTSCHMINSKAJA, *Dokl. Akad. Nauk USRR.*, 7A (1978), 614-617.
- [62] P. LEROUX, Catégories triangulaires: exemples, applications et problèmes, preprint, UQAM, 1980, non publié.
- [63] S. MILNE, Inversion properties of triangular arrays of numbers, preprint 1980.
- [64] J.A. MURPHY, M.R. O'DONOHUE, A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fraction, *J. Comp. Appl. Math.* 4 (1978), 181-190.
- [65] J. RIORDAN, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, Wiley, New-York, 1958.
- [66] W. SIEMASZKO, Branched continued fractions for double power series, *J. Comp. Appl. Math.*, 6 (1980) 121-125.

- [67] W. SIEMASZKO, On some conditions for convergence of branched continued fractions, in "Padé Approximation and its applications", Proc. Amsterdam 1980, de Bruin et van Rossum ed., Lecture Notes in Math. no888, Springer-Verlag, 1981, Heidelberg, p. 363-370.
- [68] T.J. STIELTJES, Sur la réduction en fraction continue d'une série procédant suivant les puissances descendantes d'une variable, Ann. Fac. Sc. Toulouse, 3 (1889), 1-17.