par Xavier Viennot

Leonhard Euler,

père de la combinatoire contemporaine

Les problèmes les plus célèbres d'Euler, comme les ponts de Königsberg ou la marche du cavalier aux échecs, sont des problèmes de combinatoire. Certaines contributions du prolifique mathématicien bâlois sont à l'origine de recherches très actuelles dans cette discipline.

Xavier Viennot est membre du laboratoire LaBRI, CNRS, Université Bordeaux 1.

Scientifique extrêmement prolifique, Leonhard Euler a dominé son siècle en abordant et approfondissant tous les domaines des mathématiques. En particulier il s'est intéressé au domaine appelé «combinatoire».

Les œuvres complètes d'Euler occupent 74 volumes de 400 à 600 pages chacun, sans compter une dizaine de volumes en cours de parution pour son abondante correspondance avec divers scientifiques européens de son époque. Vingt-neuf volumes sont consacrés aux mathématiques, et usuellement l'œuvre d'Euler est classée par grand domaine des mathématiques : algèbre, théorie des nombres, analyse infinitésimale, calcul différentiel, calcul intégral, combinatoire, géométrie, ...

Cet article fait suite à la conférence «*D'une lettre d'Euler à la combinatoire et à la physique contemporaine*» donnée par Xavier Viennot le mercredi 14 mars, dans le cadre du cycle *Un texte, un mathématicien* proposé par la Société Mathématique de France, la BnF, en partenariat avec *Tangente* et France Culture.

La combinatoire dans les problèmes célèbres d'Euler

Sous le nom «combinatoire», on trouve des travaux tout à fait dans le style de ce que l'on appelait encore il y a quelques années «l'analyse combinatoire» classique. Il s'agit souvent de problèmes de calcul de probabilités sur des ensemble finis, dont les solutions font intervenir des coefficients binomiaux, des factorielles. La motivation provient de calcul d'espérance de gains dans divers jeux ou loterie. Des titres d'articles (en français ou en latin) sont par exemple : «*Sur l'avantage du banquier au jeu de Pharaon*», «*Sur la probabilité des séquences dans la loterie génoise*», «*sur les rentes via-*

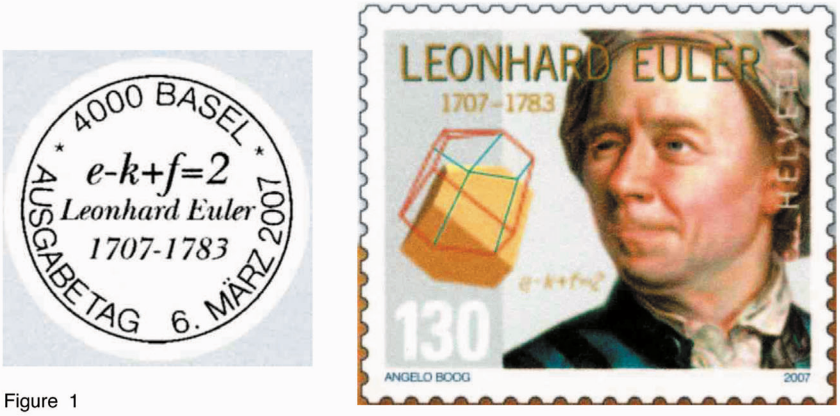


Figure 1

Timbre et cachet de la poste suisse à l'effigie d'Euler

gères », « *de quadratis magicis* », « *Solutio quaestionis curiosae ex doctrina combinationum* ».

En particulier Euler étudie le problème appelé « problème des rencontres ».

En langage moderne, il s'agit de dénombrer le nombre d_n de « dérangements » ayant n éléments, c'est-à-dire le nombre de permutations σ sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ n'ayant pas de point fixes $\sigma(i) = i$. Euler donne la relation de récurrence $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$, ainsi que l'expression explicite

$$d_n = n!\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\right),$$

d'où il déduit que la probabilité $\dfrac{d_n}{n!}$ tend vers le nombre $\dfrac{1}{e}$ lorsque n tend vers l'infini.

Cette apparition du nombre e dans un problème de jeu de rencontre n'avait pas manqué d'étonner les esprits.

Euler est aussi bien connu comme étant l'initiateur de la « théorie des graphes » avec ses deux célèbres articles sur le problème des ponts de Königsberg et la marche d'un cavalier sur un échiquier. Ce genre de problème était assez insolite à l'époque, comme en témoigne le titre de l'article d'Euler : « *Solution d'une question curieuse qui ne paraît soumise à aucune analyse* ». Il s'agit en fait de trouver un parcours du cavalier sur un jeu d'échec de telle façon que le cavalier passe une fois et une seule par toutes les cases de l'échiquier. Depuis, de tels chemins s'appellent chemins Hamiltoniens (ou circuits Hamiltoniens si l'on revient au point de départ) sur un graphe. Ici les « sommets » du graphe sont les cases de l'échiquier, et deux sommets sont reliés par une arête s'ils correspondent à deux cases telles que l'on passe de l'une à l'autre par un mouvement du cavalier.

Le problème des ponts de Königsberg posé à Euler était le suivant. La ville de Königsberg est traversée par la rivière Pregel (maintenant Pregolia) qui contient deux îles et divise la ville en quatre régions reliées par sept ponts. Il s'agit de savoir s'il est possible de trouver un parcours qui traverse une et une seule fois chacun de ces ponts. Le problème peut être énoncé en terme de « théorie des graphes » : les sommets du graphe correspondent aux quatre régions séparées par la rivière, les arêtes correspondent aux ponts. Il s'agit

Avec ce problème des ponts de Königsberg, Euler sent bien qu'il aborde des problèmes de géométrie d'un genre nouveau.

alors de trouver ce que l'on appelle un « chemin eulérien » dans le graphe, c'est-à-dire un parcours des sommets du graphe passant une et une seule fois par chacune des arêtes (ou un « circuit » lorsque l'on revient au point de départ).

En fait, avec ce problème des ponts de Königsberg, Euler sent bien qu'il aborde des problèmes de géométrie d'un genre nouveau, la géométrie dite « de position ». Le titre de son article est *« Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis »*.

Dans le même esprit est la célèbre formule d'Euler S – A + F = 2 et qui d'ailleurs orne le cachet pour la sortie la 6 mars 2007 du timbre de la poste suisse commémorant le tricentenaire de la naissance d'Euler (Figure 1). Cette formule est relative aux polyèdres convexes, dans laquelle S, A et F désignent respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de faces du polyèdre. Par exemple un cube a 8 sommets, 12 arêtes et 6 faces. Usuellement, depuis les Grecs, la géométrie s'occupe de propriétés de figures avec des angles ou des longueurs. Ici Euler inaugure une nouvelle sorte de « géométrie », qu'il appelle « stéréométrie » et qui deviendra plus tard un domaine fort actif sous le nom de « topologie combinatoire ». La grandeur S – A + F – 2 est un « invariant » et ne dépend pas de la particularité du polyèdre. Cet invariant est généralisable aux polyèdres non convexes, c'est à dire ayant des trous ou des « anses ».

À mon avis, les travaux d'Euler les plus remarquables et tout à fait d'actualité en combinatoire sont ceux, non pas classés dans la rubrique usuelle « combinatoire », mais plutôt dans ses travaux sur les séries infinies, le calcul différentiel et intégral, ou encore les fractions continues (analytiques). La combinatoire d'aujourd'hui est plurielle et a de nombreuses facettes. On parle de combinatoire énumérative, algébrique, bijective, analytique, expérimentale, quantique, etc. La combinatoire énumérative s'occupe de dénombrer des classes d'objets finis, c'est-à-dire donner une « formule » pour le nombre a_n d'objets de la « classe » A_n.

Par exemple, nous avons évoqué le nombre d_n de dérangements ayant n éléments. Un outil puissant en combinatoire énumérative est la notion de série génératrice, c'est-à-dire la « somme formelle »

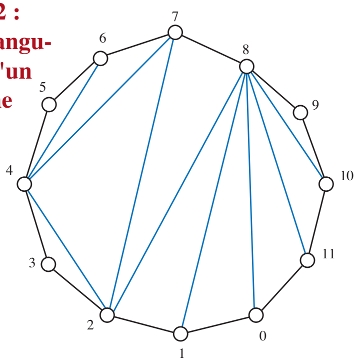
$$\sum_{n \geqslant 0} a_n t^n.$$

Le lecteur non familiarisé avec cette notion peut toujours imaginer avoir affaire à de braves polynômes de degré n du genre $a_a + a_1 t + a_2 t_2 + \ldots + a_n t^n$, les séries formelles étant des polynômes que l'on « étend » aussi loin que l'on veut $a_a + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots$, les opérations usuelles sur les polynômes (somme, produit, substitution, dérivée, ...) se prolongeant sans effort aux séries formelles.

Les nombres de Catalan

Un exemple très classique en combinatoire est formé par les les nombres de Catalan C_n. Ils peuvent se définir comme le nombre de triangulations d'un polygone de $n + 2$ côtés, c'est-à-dire la donnée de $n - 1$ diagonales deux à deux disjointes (voir Figure 2).

Figure 2 : Une triangulation d'un polygone de 12 côtés



Les premières valeurs de ces nombres sont $\{C_n\}_{n \geqslant 0} = \{1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, \ldots\}$. C'est précisément dans une lettre à son grand ami Christian Goldbach, datée à Berlin du 4 septembre 1751, qu'Euler introduit le problème de dénombrer les triangulations d'un polygone de n côtés. Il donne même la formule classique pour le nombre C_n sous la forme :

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

ainsi que la série génératrice

$$\sum_{n \geqslant 0} C_n t^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t}.$$

Euler annonce avoir une récurrence pour C_n. Il est très probable que cette récurrence soit en fait la récurrence « multiplicative » des nombres de Catalan, c'est-à-dire :

$$2(2n + 1)C_n = (n + 2)C_{n+1}.$$

En effet, dans un volume publié par l'Académie de Saint-Pétersbourg en 1758 – 1759, Jan Segner avait cherché à résoudre ce problème que lui avait posé Euler et avait donné la récurrence « additive » des nombres de catalan, à savoir :

$$C_{n+1} = \sum_{i+j=n} C_i C_j,$$

avec la condition initiale $C_0 = 1$. Dans ce même volume, un commentateur anonyme, qui ne peut être qu'Euler, donne la récurrence multiplicative des nombres de Catalan. C'est vers les années 1838–1839 que plusieurs « géomètres » (Lamé, Binet, Rodigues, Catalan) dans une série d'articles au *Journal de mathématiques pures et appliquées* (Journal de Liouville), démontrent la formule d'Euler pour les nombres C_n, lesquels nombres vont plus tard prendre le nom de « nombres de Catalan ». La récurrence additive des nombres de Catalan est équivalente à dire que la série génératrice satisfait l'équation algébrique $y = 1 + ty^2$, duquel on déduit l'expression avec $(1 - 4t)^{1/2}$, qui par dévelop-

Associaèdre

L'associaèdre de dimension n est un polyèdre dont les sommets correspondent aux C_{n+1} triangulations d'Euler d'un polygone régulier de $n + 3$ côtés. Une arête relie deux sommets lorsque l'on peut passer d'une triangulation à une autre par un « flip », c'est-à-dire en prenant une diagonale de la triangulation qui est aussi diagonale d'un rectangle et en changeant cette diagonale par l'autre diagonale du rectangle (par exemple sur la figure 2, en prenant le rectangle formé des sommets 2, 4, 7, 8 et en changeant la diagonale (2, 7) par la diagonale (4, 8)).

Cette photo représente un associaèdre de dimension 3. Il a 14 sommets (le nombre de Catalan C_4 dénombrant les 14 triangulations d'un hexagone), 9 faces (6 pentagones et 3 rectangles) et 21 arêtes (les 21 « flips » possibles). Ces associaèdres (appelés aussi polytopes de Stasheff) forment le point de départ de recherches intensives actuelles en algèbre, topologie, géométrie et combinatoire.

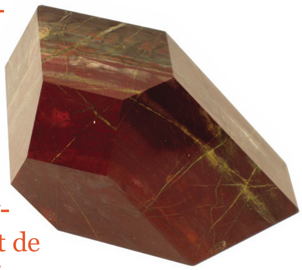


Image tirée du site de Jean-Louis Loday : http://www-irma.u-strasbg.fr/~loday/

Euler manipule avec une très grande dextérité les séries infinies, sans se soucier trop des notions de convergence.

pement avec la formule du binôme appliquée à l'exposant fractionnaire 1/2 permet de démontrer la formule d'Euler donnant C_n.
On peut se demander pourquoi Euler introduisait ses triangulations d'un polygone dans sa lettre à C.Goldbach, alors que dans cette lettre (et les précédentes), il parle de théorie des nombres. Notons que le nom de Goldbach est attaché à une conjecture toujours ouverte en théorie des nombres : tout nombre pair est somme de deux nombres premiers.
Il est piquant de constater que l'un des deux articles d'Euler consacré à la formule S – A + F = 2, publié en 1758 par l'Académie de Saint-Pétersbourg, « *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita* », a en fait été présenté à l'Académie de Berlin le 9 Septembre 1751, soit cinq jours après la lettre d'Euler à Goldach. Dans cet article, Euler démontre une formule sur la somme des angles d'un polygone en se ramenant à une triangulation du polygone... Une belle figure d'une telle triangulation orne la page 41 de l'article.
Euler manipule avec une très grande dextérité les séries infinies, sans se soucier trop des notions de convergence. Au XVIII^e^ siècle, ces notions sont encore mal définies. Mais beaucoup de calculs d'Euler prennent en fait tout leur sens en considérant les séries comme étant non pas des développements de Taylor de fonctions de l'analyse, mais comme étant des séries formelles, tout comme il est pratiqué de nos jours avec les séries génératrices de la combinatoire.

Partitions

Euler considère le problème d'énumérer les partitions d'un entier n. Une partition de l'entier n est une décomposition $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k)$ de l'entier n sous la forme $n = \lambda_1 + \ldots\ \lambda_k$, les λ_i étant des entiers positifs appelés « part ». En notant p_n le nombre de partitions de l'entier n, Euler donne leur série génératrice sous forme d'un produit infini :

$$\sum_{n \geqslant 0} p_n q^n = \prod_{i \geqslant 1} \frac{1}{1-q^i}.$$

Il s'intéresse aussi à l'inverse de ce produit infini, c'est-à-dire le produit infini $(1 - q)(1 - q^2)\ldots(1 - q^i)\ldots$. Comme il est courant de faire aujourd'hui en combinatoire, Euler a procédé de manière expérimentale en calculant

Bibliographie

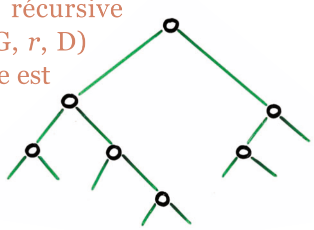
• Un survol de la combinatoire contemporaine, comprenant quelques pages au début sur les nombres Catalan et un peu de leur histoire depuis Euler :
X. G.Viennot, *Énumérons! (De la combinatoire énumérative classique aux nouvelles combinatoires: bijective, algébrique, expérimentale, quantique et ... magique)*, dans « Leçons de mathématiques aujourd'hui », vol. 3, eds E.Charpentier et N.Nikolski, Cassini, Janvier 2007, (chapitre de 70 pages).

• Pour les partitions d'entiers et le théorème pentagonal d'Euler :
G. Andrews, *The theory of paritions*, vol 2, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Cambridge University Press, 1976, 1998

• Un article de synthèse sur les nombres d'Euler et les nombres de Genocchi :
X. G.Viennot, Interprétations combinatoires des nombres d'Euler et de Genocchi, Séminaire de Théorie des nombres de Bordeaux, Publi. de l'université de Bordeaux 1, 1982-82, 94 p. téléchargeable depuis le site de l'auteur www.labri.fr/perso/viennot (article [26]).

Synthèse d'images d'arbres

Un arbre binaire est un objet combinatoire défini de manière récursive comme étant soit un arbre réduit à une feuille, soit un triplet (G, r, D) formé d'une racine r et de deux arbres binaires G et D. Un exemple est donné sur la figure ci-contre.



Un arbre binaire admet n sommets internes (symbolisés par les ronds, ayant toujours deux fils) et $n + 1$ feuilles (ou sommets externes, n'ayant pas de fils). Le nombre d'arbres binaires ayant n sommets internes est le nombre de Catalan C_n et une bijection classique transforme une triangulation d'un polygone ayant n+2 côtés en un arbre binaire ayant n sommets internes. Ces objets sont à la base de très nombreux algorithmes en informatique.

La photo ci-contre montrant des synthèses d'images d'arbres a été produite avec des algorithmes basés sur des propriétés fines de la combinatoire des nombres de Catalan.

Image de synthèse de paysage
©ASIA 1989, Didier Arquès, Georges Eyrolles, Nicolas Janey, Xavier Viennot
(ASIA signifie "Atelier de Synthèse d'Images d'Arbres")
D'autres photos sont visibles sur :
http://web.mac.com/xgviennot/iWeb/Xavier_Viennot/galerie.html

à la main les premiers coefficients de ce produit infini. Aujourd'hui les outils informatiques très puissants comme *Maple* ou *Mathematica* ont permis de développer un aspect expérimental de la combinatoire. Les premiers termes du produit sont

$1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + \ldots$

Une loi apparaît qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\prod_{i \geqslant 1}(1 - q^i) = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \left(q^{\frac{n(3n-1)}{2}} + q^{\frac{n(3n+1)}{2}} \right).$$

C'est le célèbre « théorème pentagonal » d'Euler.

Les nombres $\frac{n(3n-1)}{2}$ sont les nombres pentagonaux, car ils dénombrent le nombre de points dans des pentagones emboîtés les uns dans les autres (Figure 3).

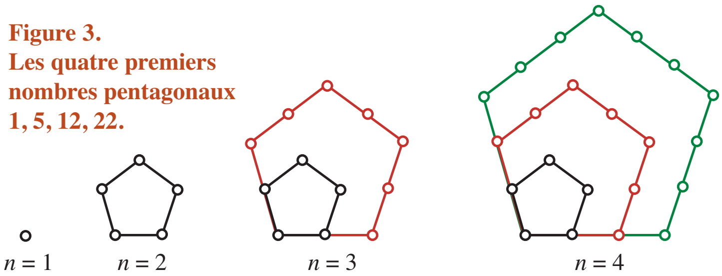
Le produit infini :

$$\prod_{i \geqslant 1}(1 + q^i)$$

dénombre les partitions des entiers en part distinctes. On déduit alors que le coefficient de q^n dans ce produit infini est la différence entre le nombre de partitions de l'entier n en un nombre pair de parts distinctes, diminué du nombre de partitions de l'entier n en un nombre impair de parts distinctes.

Les preuves dites « bijectives » pren-

Figure 3.
Les quatre premiers nombres pentagonaux 1, 5, 12, 22.



nent une grande importance dans la combinatoire d'aujourd'hui.
Une preuve dite « bijective » du théorème pentagonal consiste à essayer d'associer deux par deux les partitions de n en parts distinctes, une partition ayant un nombre pair de parts avec une partition ayant un nombre impair de parts.

Les termes vont se supprimer deux à deux dans le développement du produit infini, de manière exacte pour les termes contribuant au coefficient de q^n pour $n \neq \frac{j(3j \pm 1)}{2}$.
Il restera une partition non appariée pour $\frac{n = j(3j \pm 1)}{2}$.
Une telle construction permet de déduire que les coefficients correspondants sont 0 ou $(-1)^j$.

Nombres tangents et nombres de Bernouilli

Euler s'est aussi intéressé à d'autres séries infinies, comme les développements en série de Taylor des fonctions trigonométriques tangente et sécante (c'est-à-dire l'inverse du cosinus). Euler écrit ces séries sous la forme dite « exponentielle », c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\cos t} = \sum_{n \geqslant 0} E_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

$$\text{et } \tan t = \sum_{n \geqslant 0} T_{2n+1} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Les nombres E_{2n} et T_{2n+1}, sont appelés nombres sécants et tangents (ou aussi nombres d'Euler). Leur premières valeurs sont :
$\{E_{2n}\} = \{1, 5, 61, 1385, ...\}$
et $\{T_{2n+1}\} = \{1, 2, 16, 272, 7936, ...\}$.
Euler remarque le lien avec les nombres de Bernoulli B_{2n}.

Ces nombres furent introduit par Jacques Bernoulli, le frère de Jean Bernoulli qui fut le « patron » d'Euler à Bâle, avant son départ en 1727 pour Saint-Pétersbourg. Les nombres de Bernoulli apparaissent un peu partout en mathématiques.
Leurs premières valeurs sont :
$\{B_{2n}\} =$

$$\left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66}, \frac{691}{2730}, \frac{7}{6}, \ldots\right\}.$$

Euler montre que les nombres $G_{2n} = 2(2^{2n} - 1)B_{2n}$ sont des entiers liés aux nombres tangents par la relation $2^{2n} G_{2n+2} = (n+1)T_{2n+1}$.
Les entiers G_{2n} s'appelle aujourd'hui nombres de Genocchi.
Leurs premières valeurs sont
$\{G_{2n}\}_{n \geqslant 1} = \{1, 1, 3, 17, 155, 2073, ...\}$.
Aux alentours des années 1880, Désiré André a donné une « interprétation combinatoire » des nombres sécants et tangents, c'est-à-dire qu'il a découvert des objets combinatoires dénombrés exactement par ces nombres : ce sont les permutations alternantes, c'est-à-dire les permutations :

$$\sigma = (\sigma(1) > \sigma(2) < \sigma(3) > \sigma(4) < \ldots \sigma(n)).$$

Le nombre tangent (resp. sécant) est le nombre de permutations alternantes de $\{1, 2, \ldots, 2n+1\}$ (resp. $\{1, 2, \ldots, 2n\}$).
Il a fallu attendre à nouveau presque un siècle pour que ces recherches d'interprétation combinatoire de nombres (ou aussi polynômes ou fonctions remarquables) prennent tout leur essor. C'est devenu une branche très active de la combinatoire moderne.

X. V.